

बीजगणित ।

पूर्वार्ध

बहुत उदाहरणों से युक्त

बनारस के राजकीय संस्कृत पाठशाला में
गणित और ज्योतिःशास्त्र के
अध्यापक
श्रीबापूदेव शास्त्री ने बनाया ।

दूसरी बार छापा

ELEMENTS OF ALGEBRA.

FIRST PART

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

PANDITA BÁPÚ DEVA SÁSTRI,

PROFESSOR OF MATHEMATICS AND ASTRONOMY IN THE SANSKRIT COLLEGE, BENARES,
HONORARY MEMBER OF THE ROYAL ASIATIC SOCIETY OF GREAT BRITAIN
AND IRELAND, HONORARY MEMBER OF THE ASIATIC SOCIETY OF
BENGAL AND FELLOW OF THE CALCUTTA UNIVERSITY.

SECOND EDITION.

BENARES:

PRINTED AT THE MEDICAL HALL PRESS.

1875.

PRINTED BY E. J. LAZARUS & CO.,
AT THE MEDICAL HALL PRESS, BENARES.

TRANSLATION OF THE PREFACE.

The science of computation comprehends three branches:—

1st.—*That which treats of numbers.*—As the result at which we arrive in each case by the employment of numbers does not in general apply to other cases in which the numbers employed are different, this branch (viz. Arithmetic) is called in Hindí VYAKTA-GAṆITA, *i. e.* the computation of particulars. This department of mathematics was originally cultivated in India, whence it spread into other countries. This proposition is strongly supported by the circumstance that the Europeans acknowledge that they owe their knowledge of figures to the Arabs, by whom the science is called '*The Indian.*'

2d.—*That which treats of lines.*—In this branch of inquiry our investigations and conclusions are general; but it does not answer all the purposes of computation. The fundamental principles of this branch were at a very early date known in India, whence a knowledge of this science spread into Egypt and other countries. For a minute detail of the circumstances connected with this, the reader is referred to the preface to my KSHETTRAMITI (a treatise on Geometry in Sanskrit).

This department of Mathematics was termed REKHÁ-GAṆIT by Paṇḍita Jagannátha of the court of Jayasiñha, but I prefer the term KSHETTRA-MITI.

3d.—*That which treats of the relations of abstract quantities by means of letters and symbols.*—As the letters do not, like numbers, disappear when any operation is performed on them, and the result therefore must hold good whatever numbers are substituted for the letters, the results arrived at by this method of

computation are general. Hence it is called the computation of genera (TATTVA), or the root (MÚLA) of Arithmetic, or the computation of what are not merely particulars (AVYAKTA).

Regarding the invention of this science, *viz.* Algebra, I am disposed to think that it was orignally cultivated in India, whence it spread into other countries, as examples of Algebraical computation are to be found even in such ancient treatises as the SÚRYA-SIDDHÁNTA.

There is for instance in the SÚRYA-SIDDHÁNTA a rule, (which we give in a note),* deducible only by Algebraical computation,

---

* Subtract the square of the sine of the amplitude from the half of the square of the radious. Multiply the remainder by 144. Divide the product by the half of the square of the gnomon (that is, by 72) added to the square of the equinoctial shadow *i. e.* the midday-shadow of the gnomon when the sun is in the equinoctial points. Let the name of the result arrived at by this process of calculation be KARAṆÍ. Let the calculator write down this number for future reference. Then having multiplied twelve times the equinoctial shadow by the sine of the amplitude, let him divide it by the former divisor (*i. e.* by 72 added to the square of the equinoctial shadow). Let the result be called PHALA.

Let the PHALA be subtracted from, or added to, the square root of the KARAṆÍ increased by the square of the PHALA, according as the sun is south or north of the equinoctial. The result is called KOṆA-ŚANKU—*i. e.* "The sign of the altitude of the sun when situated in the vertical circle, of which the azimuth distance is 45.°" If the sun be south of the calculator, then the KOṆA-ŚANKU will be south-east or south-west, but if it be north of him, then it will be north-east or north-west.

Dem. Let x represent the KOṆA-ŚANKU.

" p " " PALABHÁ (*i. e.* the equinoctial shadow).

Let a represent AGRÁ (*i. e.* the sine of the amplitude).

" k " KARAṆÍ.

" f " PHALA.

Then $12 : p :: x : \frac{p}{12}x$ = ŚAKUNTALA.

Now, since the result of adding the AGRÁ to, or subtracting it from, the ŚANKUTALA, according as the sun is south or north of the equator, is called BHUJA (*i. e.* the sine of the difference between the sun's place and the prime vertical),

$$\therefore \frac{p}{12} x \pm a = \text{BHUJA}.$$

but when the sun is N. E., N. W., S. E., or S. W., it is equidistant from the prime vertical circle and meridian. Therefore the hypotenuse of a right-angled triangle, of which one side is the BHUJA and the other equal to it, is the sine of the zenith distance.

for determining the sine of the altitude of the sun when situated in the vertical circle of which the Azimuth distance is 45.° But all the original treatises on Algebra have perished, and of those compiled since the time of ÁRYA BHAṬA that of BHÁSKARÁCHÁRYA only is in use: the others are rarely to be met with.

The first treatise on Algebra published in Greece was that prepared about 1500 years ago by an ingenious Greek named Diophantus.

The Arabs and Persians have never been the inventors of any science. They have always borrowed from other nations. Algebra therefore could not have been a science of their invention

---

$$\therefore \overline{\text{hyp.}}\,\Big|^2 = 2\left(\frac{p}{12}x \pm a\right)^2 = \frac{p^2}{72}x^2 \pm \frac{ap}{3}x + 2a^2$$

Now, since the square of the sine of the zenith distance added to the square of the sine of the altitude is equal to the square of the radius.

$$\therefore x^2 + \frac{p^2}{72}x^2 \pm \frac{ap}{3}x + 2a^2 = R^2$$

Clearing fractions, $72x^2 + p^2x^2 \pm 24apx + 144a^2 = 72R^2$

or $(p^2 + 72)x^2 \pm 24apx = 72R^2 - 144a^2$

$$\therefore x^2 \pm \frac{24ap}{p^2+72}x = \frac{72R^2 - 144a^2}{p^2+72} = \frac{144(\frac{1}{2}R^2 - a^2)}{p^2+72}$$

Now, in the foregoing equation it will be observed, that the value of the side containing the known quantities is what has been already spoken of under the name of KARAṆÍ, and that the half of the co-efficient of x is what has been already spoken of under tha name of PHALA.

$$\therefore x^2 \pm 2fx = k$$

Completing the square $x^2 \pm 2fx + f^2 = f^2 + k$

Extracting the square root $x \pm f = \sqrt{f^2 + k}$

$$\therefore x = \sqrt{f^2 + k} \mp f \qquad \text{(A)}$$

From this it is evident that PHALA is subtracted from, or added to, the square root of the KARAṆÍ increased by the square of the PHALA according as the sun is south or north of the equinoctial.

In (A), if $\sqrt{f^2 + k}$ be assumed as negative, then the value of x (*i. e* of the KOṆAŚANKU) will also be negative, (*i. e.* the sun will be below the horizon).

As the foregoing calculation is effected by a method of procedure clearly Algebraical, it follows that the Hindus were in possession of that science at the date of the earliest of their mathematical treatises.

Now we cannot say that they borrowed from the Greeks, since the mathematical works of the Arabs are essentially different from those of Diophantus. Hence there can be little doubt that they derived their Algebra, as well as Arithmetic, from the Hindús. This science was in course of time introduced by the Arabs into Europe, and thence spread into other quarters of the globe.

The first European treatise on Algebra was that of the Italian Lucas de Burgo A. D. 1478. The science was next cultivated in Germany, and Stifel introduced the symbols +, —, and √ in the year 1544. In 1557, Robert Recorde introduced the science into England. Spreading over the whole of Europe, it has now reached a very high degree of perfection.

There are a great variety of problems admitting of an easy solution by the aid of European Algebra, which cannot be solved by the Hindú method. Mr. D. F. M'Leod (then Magistrate of Benares and afterwards Lieutenant Governor of the Punjab) therefore desired me to prepare a treatise on European Algebra in the Hindí language. Although to write properly on such a subject requires a very intelligent person, seeing that Bháskaráchárya declares the science to be nothing else than " reason exerted," yet, however incompetent for the task, being anxious to meet the wishes of this gentleman, I ventured upon the undertaking. When the first part of this work was completed, it was lithographed at Bombay in the year 1850 by order of Government, N. W. P. The first part is out of print and the second part is ready for the press. As many people are now very anxious to get the whole work *i. e.* the first and second parts printed, Mr. Kempson the director of Public Instruction, N. W. P. has encouraged me to publish it.

The work is compiled from various European and Native authors, and Ślokas of Bháskaráchárya are occasionally quoted.

The first part, which contains 5 chapters, has now been considerably improved and many examples have been added to it.

Chapter I. Definition of terms.

Chapter II. Simple Rules including Involution, Evolution, Properties of prime quantities, &c.

Chapter III. The Greatest Common Measure and Least Common Multiple.

Chapter IV. Algebraic Fractions, Determination of the real values of $\frac{0}{0}$ and $\frac{\infty}{\infty}$, Circulating decimal periods &c.

Chapter V. Nature and Classifications of Equations, Simple Equations involving one unknown quantity, Simple Equations of two or more unknown quantities, Problems producing simple Equations and Single and Double Position.

BENARES SANSKRIT COLLEGE:
The 18th February, 1874.

BÁPU DEVA ŚÁSTRI.

॥ श्रीः ॥

भूमिका ।

गणित तीन प्रकार का है । उस में

१ । जो एक, दो इत्यादि संख्याओं से बनता है वह एक गणित है । इस में जो गणनाप्रकार एकत्र उपपन्न हो सो प्रायः अन्यत्र उपपन्न नहीं होता इसलिये यह विशेष गणित कहलावे और इसी लिये इस की व्यक्त गणित अर्थात् स्पष्ट गणित संज्ञा है । यह पहिले भारतवर्ष में उत्पन्न हुआ और फिर यहां से सब पृथ्वी में फैल गया । क्योंकि यह अत्यन्त प्रसिद्ध है कि यह गणित युरोपीयन लोगों ने आरबों से लिया और आरब लोगों ने भारतवर्ष से लिया क्योंकि वे इस को हिसाबे हिन्द कहते हैं ।

२ । जो गणित रेखाओं से बनता है वह दूसरा । इस से जो गणनाप्रकार एकत्र उपपन्न हो वह सर्वत्र उपपन्न होता है परन्तु इससे गणितमात्र का निर्वाह नहीं है । इस गणित की तत्त्वबातें अतिप्राचीन काल से भारतवर्ष में प्रसिद्ध हैं इस में किसी को संशय नहीं, परन्तु यह मिश्रादि देशों में बहुत फैल गया । इस का सविस्तर वृत्तांत मत्कृत क्षेत्रमिति ग्रन्थ की भूमिका में देख लेओ । इस प्रकार का नाम जयसिंह राजा के जगन्नाथ नामक पण्डित ने रेखागणित रखा है परन्तु हम ने इस का नाम क्षेत्रमिति रखा है ।

३ । जो गणित संख्याओं के स्थान में अक्षर रखके उन से बनाते हैं वह तीसरा । इस में एकत्र जो गणितप्रकार उपपन्न हो उस का व्यभिचार अन्यत्र कहीं नहीं होता क्योंकि जो अक्षर किसी एक संख्या का द्योतक हो तो वह संख्याओं के ऐसा दूसरे अक्षर में लुप्त नहीं हो जाता

इसलिये इस में फल में जो एक २ अक्षर के स्थान में कोई संख्या रखो तो वह फल कभी अशुद्ध नहीं होता अतएव यह सामान्य गणित कहलावे। और इसी लिये इस को बीज अर्थात् तत्त्व वा मूल और अव्यक्त कहते हैं । अब यह गणित पृथ्वीपर पहिले किस देश में उत्पन्न हुआ इस का विचार करते हैं ।

मेरे विचार में यह आता है कि यह गणित पहिले हिन्दुस्थान में उत्पन्न हुआ फिर यहां से सर्वत्र फैला है । इस का कारण यह है कि, सूर्यसिद्धान्तादिक जो अति प्राचीन ग्रन्थ हैं इन सभों में इस गणित से उपपन्न हुए प्रकार मिलते हैं । जैसा सूर्यसिद्धान्त में कोणशङ्कु का आनयन जो* टिप्पणी में लिखा है इस की उपपत्ति बीजगणित के

---

* त्रिज्यावर्गार्धतोऽग्रज्यावर्गोनाद्द्वादशाहतात् । पुनर्द्वादशनिघ्नाच्च लभ्यते यत् फलं बुधैः ॥
शङ्कुवर्गार्धसंयुक्तविषुवद्वर्गभाजितात् । तदेव करणी नाम तां पृथक् स्थापयेद्बुधः ॥
अर्कघ्नी विषुवच्छायाग्रज्यया गुणिता तथा । भक्ता फलाख्यं तद्वर्गसंयुक्तकरणीपदम् ॥
फलेन हीनसंयुक्तं दक्षिणोत्तरगोलयोः । याम्ययोर्विदिशोः शङ्कुरेवं याम्योत्तरे रवौ ॥
परिभ्रमति शङ्कोस्तु शङ्कुरुत्तरयोस्तु सः ॥

इस का अर्थ । त्रिज्या के वर्ग के आधे में अग्रा का वर्ग घटा के शेष को १२ से गुण के फिर उस को १२ से गुणदेओ और इस में शङ्कुवर्ग के आधे अर्थात् ७२ से सहित जो पलभावर्ग उस का भाग देओ इससे जो भजनफल गणक लोग पावेंगे उस का नाम करणी होवे उस करणी को गणक अलग लिख रखे फिर १२ गुनी पलभा को अग्रा से गुण के उस में वैसाहि भाग देओ अर्थात् ७२ से सहित जो पलभावर्ग उस का भाग देओ जो लब्ध होगा उस का नाम फल होवे । अब इस फल के वर्ग से सहित जो करणी उस का वर्गमूल उस फल से रहित वा सहित करो जब सूर्य दक्षिण वा उत्तर गोल में होवे अर्थात् जो सूर्य दक्षिण गोल में होवे तो करणी के वर्गमूल में फल घटा देओ और जो उत्तर गोल में होवे तो फल जोड़ देओ सो शङ्कु होता है । यह शङ्कु जिस स्थान के लिये शङ्कु सिद्ध करते हो उस की दक्षिण की ओर सूर्य भ्रमण करता हो तो अग्नेयी और नैर्ऋती दिशाओं में बनता है और जो उत्तर की ओर सूर्य भ्रमण करता हो तो ईशानी और वायवी दिशाओं में बनता है ।

इस की उपपत्ति यह है ।

यहां मानो य = कोणशङ्कु । तब १२: पलभा :: यः $\frac{\text{प}}{\text{१२}}$ य = शङ्कुतल ।

बिना नहीं हो सकती इसलिये इन अतिप्राचीन ग्रन्थों के भी पहिले से बीजगणित यहां प्रसिद्ध है यह सिद्ध होता है । परन्तु बीजगणि के आर्ष ग्रन्थ सब नष्ट हुए सांप्रत आर्यभट के काल से इधर जो बीज

अब जो दक्षिण गोल में सूर्य हो तो शङ्कुतल में अग्रा जोड़ देने से और जो उत्तर गोल में हो तो घटादेने से भुज बनता है $\therefore \frac{प}{१२} य \pm अ = भुज$ ।

परंतु जब कोण में सूर्य रहता है तब उस का जितना अन्तर सममण्डल से रहता है उतनाहि याम्योत्तर वृत्त से रहता है इसलिये तब दृग्ज्या अर्थात् नतांशों की ज्या कर्ण होती है और भुज और कोटी ये दोनों भुज के समान होते हैं ।

$$\therefore दृग्ज्या^२ = २\left(\frac{प}{१२}\cdot य \pm अ\right)^२ = \frac{प^२}{७२}य^२ \pm \frac{अप}{३}य + २अ^२ ।$$

अब शङ्कुवर्ग और दृग्ज्यावर्ग इन का योग त्रिज्यावर्ग के समान होता है ।

$$\therefore य^२ + \frac{प^२}{७२}य^२ \pm \frac{अप}{३}य + २अ^२ = त्रि^२ .$$

$$छेदगमसे, \quad ७२य^२ + प^२य^२ \pm २४ अपय + १४४ अ^२ = ७२ त्रि^२$$

$$वा, \quad (प^२ + ७२)य^२ \pm २४ अपय = ७२ त्रि^२ - १४४ अ^२$$

$$\therefore य^२ \pm \frac{२४ अप}{प^२ + ७२} य = \frac{७२ त्रि^२ - १४४ अ^२}{प^२ + ७२} = \frac{१४४(\frac{१}{२}त्रि^२ - अ^२)}{प^२ + ७२}$$

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि इस में जो व्यक्त पक्ष है उस की करणी संज्ञा किई है और य के वारद्योतक के आधे की फलसंज्ञा किई है ।

$$\therefore य^२ \pm २फय = क$$

$$वर्गपूर्ति से, य^२ \pm २फय + फ^२ = फ^२ + क$$

$$मूल लेने से, य \pm फ = \sqrt{फ^२ + क}$$

$$\therefore य = \sqrt{फ^२ + क} \mp फ$$

इसी से फल के वर्ग से सहित जो करणी उस का वर्गमूल उस फल से रहित वा सहित करो जब सूर्य दक्षिण वा उत्तर गोल में होवे यह स्पष्ट प्रकाशित होता है

इस में जो $\sqrt{फ^२ + क}$ यह व्यक्तपक्ष का मूल ऋण मानो तो दोनों गोल में शङ्कुमान ऋण होगा अर्थात् तब सूर्य क्षितिज के नीचे कोणवृत्त में आवेगा ।

यह ऊपर का गणित केवल बीजही से बनता है इस से स्पष्ट है कि इन अतिप्राचीन सिद्धान्तों के भी पहिले से बीजगणित का प्रचार यहां था ।

बने हैं उन में एक श्रीभास्कराचार्य का बीजगणित प्रसिद्ध है और सब क्वचित् मिलते हैं ।

अनुमान १५०० बरस पहिले ग्रीस देश में एक डायाफण्टस नामें विद्वान् हुआ उस ने वहां बीज का ग्रन्थ पहिले बनाया ।

आरब वा फारस के लोगों से कोई विद्या कभी उत्पन्न नहीं हुई इन्हों ने सब विद्याओं का संग्रह इधर उधर से किया तब बीजगणित अवश्य इन्हों ने दूसरे से लिया है इस में संशय नहीं सोभी ग्रीक लोगों से न लिया होगा क्योंकि डायाफण्टस का बीज और आरबों का बीज इन में बड़ा बीच है इसलिये उन्होंने वह ग्रीक लोगों से नहीं लिया यही सिद्ध होता है । तब अवश्य वे जैसा व्यक्तगणित हिन्दुस्थान से ले गये वैसा बीजगणित भी यहां से ले गये होंगे यह सम्भाव्य है । फिर आरब से युरोप में गया । यों समस्त पृथ्वी में बीजगणित हिन्दुस्थान से गया है ।

युरोप में बीजगणित का ग्रन्थ पहिले ईसवी सन् १४०८ में लुकास डी बर्गो नामक एक विद्वान इटली देश में ले गया फिर वहां से जर्मनी देश में गया वहां सन् १५४४ में स्तिफेल नामक एक विद्वान ने धन, ऋण और मूल इन को द्योतित करने के लिये क्रम से +, −, √ ये चिह्न ठहराए । फिर थोड़ेही काल से सन् १५५७ में राबर्ट रिकार्ड ने इग्लंड में इस विद्या का प्रचार किया यों युरोप में यह विद्या फैल गई । वह अब वहां परमावधि के निकट पहुंची है संप्रति युरोपियन रीति से जो २ बीज के विषय सिद्ध होते हैं वे हमारे भारतवर्षीय बीजों से किसी प्रकार से साध्य नहीं हैं इस कारण वे बीज के प्रकार इस देश में प्रसिद्ध होने के लिये पहिले श्रीयुत डी॰ एफ्॰ मेक्लोड् साहिब ने (जो फिर पंजाब के गवर्नर हुए थे) मुझ को यह ग्रन्थ हिन्दी में बनाने की आज्ञा दिई । फिर यद्यपि बीज का ग्रन्थ करना यह अतिशय सूक्ष्म बुद्धि जिस की होगी उसी का काम है क्योंकि यह केवल बुद्धि का व्यापार है (यों भास्करा-

चार्य ने भी अपने ग्रन्थ में लिखा है) तथापि मैं अल्पबुद्धि केवल उस पूर्वोक्त महाशय की इच्छा पूरी करने के लिये उस की आज्ञा के अनुसार इस ग्रन्थ के बनाने में प्रवृत्त हुआ। और जब इस ग्रन्थ का पूर्वार्ध बन गया तब वह पश्चिमोत्तर देशाध्यक्ष श्रीगवर्नर साहिब की आज्ञा से सन् १८५० में बंबई में छापा गया। फिर पहिली बार छपीहुई पूर्वार्ध की प्रति सब उठ गईं, और इस ग्रन्थ का उत्तरार्ध भी हमारा बनाया हुआ छापने के लिये सिद्ध हुआ। और जब बहुत लोगों को इस समग्र ग्रन्थ के छपजाने की बड़ी उत्कण्ठा हुई तब पश्चिमोत्तर देश की सब शालाओं के डैरेक्टर श्री केमसन् साहिब ने इस समग्र ग्रन्थ के छप जाने में मुझ को बड़ा प्रोत्साहन और साहाय्य किया।

यह ग्रन्थ अनेक अंग्रेजी के और इस देश के बीजगणितों को देख के बनाया है इस में प्रसंग से श्रीभास्कराचार्य के श्लोक भी कहीं २ लिखे हैं। इस का पूर्वार्ध जो पहिली बार छपा था उस से सांप्रत के पूर्वार्ध में बहुत विशेष हैं और अभ्यास के लिये उदाहरण भी पहिले से बहुत अधिक इस में लिखे हैं।

इस पूर्वार्ध में ५ अध्याय हैं।

१ ले अध्याय में परिभाषा, और उस का अच्छी भांति बोध होने के लिये कुछ उत्थापन के उदाहरण और प्रत्यक्ष बातें इतने विषय हैं।

२. रे में संकलन, व्यवकलन इत्यादि ६ परिकर्म और अन्त में प्रकीर्णक अर्थात् अग्रिम विषयों के उपयोगी कुछ फुटकर विषय लिखे हैं। इस प्रकीर्णक में पहिले समान वा विषम दो पक्षों का समशोधन वा पक्षान्तरनयन, संक्रमण, बीजात्मक अदृढ राशि के गुण्यगुणकरूप अवयवों का ज्ञान होने के लिये कुछ उपयोगी युक्ति और परस्पर जो दो राशि दृढ़ हैं उन के गुण इतने विषय कहे हैं।

३ रे में बीजात्मक पदों का महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य जानने के प्रकार हैं।

४ थे में बीजात्मक, भिन्नपद, उन के भेद, उन के संकलनादिक ६ परिकर्म और प्रकीर्णक इतने विषय कहे हैं। इस प्रकीर्णक में छेदगम, विषमपदों का गणित, ऋणात्मक और भिन्नात्मक घातमापक, ० और ∞ इन के गुण और $\frac{0}{0}$ और $\frac{\infty}{\infty}$ इन राशिओं का वास्तव मान जानने की रीति, और अन्त में दशमलव भिन्नराशिओं का गणित है।

५ वे में समीकरण, उस के भेद, एकवर्ण एकघातसमीकरण, अनेकवर्ण एकघातसमीकरण, एकघातसमीकरणसंबन्धि प्रश्न, और अन्त में इष्टकर्म और द्वीष्टकर्म है।

———

॥ अनुक्रमणिका ॥

पृष्ठाङ्क

अध्याय १

परिभाषा १

अध्याय २

संकलन ११
व्यवकलन १७
कोष्ठ २०
गुणन २७
भागहार ३५
घातक्रिया ४६
मूलक्रिया ५२
प्रकीर्णक ६२

अध्याय ३

महत्तमापवर्तन ८५
लघुतमापवर्त्य १०३

अध्याय ४

बीजात्मकभिन्नपदों का व्युत्पादन ११७
भिन्नपदों का रूपभेद ११९
... ... संकलन और व्यवकलन १२७
... ... गुणन १३९
... ... भागहार १४४
... ... घातक्रिया १५३
... ... मूलक्रिया १५७
भिन्नसंबन्धिप्रकीर्णक १६२

अध्याय ५

समीकरण का व्युत्पादन १८९

एकवर्णएकघातसमीकरण १९१

अनेकवर्णएकघातसमीकरण २१५

एकघातसमीकरणसंबन्धि प्रश्न २३५

दृष्टकर्म और द्वीष्टकर्म २६७

नत्वेभास्यं वक्ष्ये युरोपियनरीतितो बीजम् ।
स्फुटया हिन्द्याख्यगिरा बापूदेवाभिधानोऽहम् ॥ १ ॥

बीजगणित ।

अध्याय १ ।

उपक्रम १ । अ, क, ग, इत्यादि अक्षरों को संख्याओं के द्योतक अर्थात् दिखलाने हारे मान के उन्हीं अक्षरों से जो गणित करते हैं उस को बीजगणित कहते हैं । यह प्रायः सब गणितों का उपयोगी है ।

यहां जो जो संख्या व्यक्त अर्थात् जानी हुई हैं उन के द्योतक अ, क, ग, इत्यादि वर्णमाला के पहिले अक्षर मानलिये हैं। और जो संख्या अव्यक्त अर्थात् अज्ञात हैं उन के द्योतक य, र, ल, इत्यादि वर्णमाला के अन्त के अक्षर मानलिये हैं । और जिन संख्याओं के व्यक्तत्व का वा अव्यक्तत्व का निश्चय नहीं है उन के द्योतक त, थ, द, इत्यादि मध्यम वर्ण मानलिये हैं । और इन सब वर्णों के संकलन, व्यवकलन इत्यादि परिकर्मों को कितने एक +, −, ×, ÷ इत्यादि चिह्नों से दिखलाते हैं ।

परिभाषा ।

२ । + यह चिह्न संकलन का द्योतक, इस को धन चिह्न कहते हैं । यह चिह्न जिस पद के अर्थात् किसी संख्या के दिखलाने हारे बीजात्मक चिह्न के पहिले रहता है सो दिखलाता है कि उस केवल पद की संख्या जोड़ी हुई है उस को धन पद कहते हैं। और इसीलिये कोइ दो पदों के बीच में वा बहुत पद होवें तो पास २ के दो २ पदों के बीच में + इस चिह्न को लिखने से जो बनता है वह दिखलाता है कि उन सब

पदों की संख्या मिलके इकट्ठा किई हुई है। जैसा। अ+क यह दिखलाता है कि अ की संख्या में क की संख्या मिलाई है। और अ+क+ग यह अ, क और ग इन की संख्याओं के योग को दिखलाता है।

३। −यह चिह्न व्यवकलन का द्योतक, इस को ऋण चिह्न कहते हैं। यह चिह्न जिस पद के आदि में रहता है सो दिखलाता है कि उस केवल पद की संख्या घटाई है। और उस को ऋण पद कहते हैं। जैसा। अ−क यह दिखलाता है कि अ की संख्या में क की संख्या घटाई है।

४। $\overline{\text{अ+क}}+\overline{\text{ग−घ}}$, (अ+क)+(ग−घ), {अ+क}+{ग−घ}, वा, [अ+क]+[ग−घ] ये सब चारों प्रत्येक दिखलाते हैं कि अ+क की संख्या में ग−घ की संख्या जोड़ दिई है। और $\overline{\text{अ+क}}-\overline{\text{ग−घ}}$, (अ+क)−(ग+घ) इत्यादि प्रत्येक दिखलाते हैं कि अ+क की संख्या में ग−घ की संख्या घटा दिई है। —इस चिह्न को शृङ्खल और ( ), { } और [ ] इन को कोष्ठ कहते हैं। ये सब प्रत्येक दिखलाते हैं कि अपने अन्तर्गत जो पद हैं वे मिलके एक पद है।

एक हि अर्थ दिखलाने के लिये एक शृङ्खल और तीन कोष्ठ ये चार चिह्न कल्पना करने का प्रयोजन यह है कि जब एक कोष्ठ का काम हो तब तो प्रायः ( ) यही कोष्ठ लिखते हैं और एक के बाहर एक ऐसे अनेक कोष्ठ करने का काम पड़े तब जो एक हि प्रकार का कोष्ठ का चिह्न हो तो कौन कोष्ठ कहां तक है इस का तुरंत बोध न होगा और विजातीय कोष्ठ हों तो इस में व्यामोह न होगा।

जैसा। च−[घ−{ग−(अ+क)}] यह दिखलाता है कि अ+क की संख्या को ग की संख्या में घटा के शेष को फिर घ की संख्या में घटा के इस शेष को च की संख्या में घटा देओ। जो एक हि प्रकार का कोष्ठ का चिह्न हो तो इस अर्थ की शीघ्र उपस्थिति न होगी। इस लिये अनेक प्रकार के कोष्ठ के चिह्न कल्पना किये हैं।

५। × यह वा · यह चिह्न गुणन का द्योतक है। जैसा, अ × क वा अ·क यह अ और क इन के गुणनफल को दिखलाता है। इसी भांति अ × क × ग, वा, अ·क·ग यह अ, क और ग इन के गुणनफल को दिखलाता है। यहां अ, क और ग इन को गुण्यगुणकरूप अवयव कहते हैं। परंतु जो गुण्यगुणकरूप अवयव केवल बीजात्मक पद हों तो उन के गुणनफल में लाघव के लिये प्रायः गुणनचिह्न नहीं लिखते,। जैसा। अ, क और ग इन के गुणनफल को प्रायः अकग, यों लिखते हैं और ३, य और र इन के गुणनफल को ३यर यों लिखते हैं।

इसी भांति अ (क + ग), वा, अ × $\overline{\text{क + ग}}$ इत्यादि प्रत्येक दिखलाते हैं कि क + ग की संख्या को अ की संख्या से गुण दिया है। और $\overline{\text{अ + क}}$ × $\overline{\text{अ + ग}}$, वा, (अ + क) (अ + ग) इत्यादि प्रत्येक अ + क और अ + ग के गुणनफल को दिखलाते हैं।

किसी पद के गुण्यगुणकरूप दो अवयव मान के गुणक को गुण्य का वारद्योतक कहते हैं। जैसा। ५ अय, यहां ५ को अय का वारद्योतक कहते हैं। ५अ को य का वारद्योतक कहते हैं। और इसी लिये अ का वारद्योतक १ है।

६। ÷ यह चिह्न भागहार का द्योतक है। जैसा। अ ÷ क यह दिखलाता है कि अ की संख्या में क की संख्या का भाग दिया है। परन्तु भिन्नपद का अंश भाज्य है और छेद भाजक है इसलिये भाज्यभाजकों को भिन्नपद की रीति से भी लिखते हैं। जैसा, $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$।

ऐसाहि। $\overline{\text{अ + क}}$ ÷ $\overline{\text{ग − घ}}$, (अ + क) ÷ (ग − घ), $\frac{\text{अ + क}}{\text{ग − घ}}$ ये हर एक दिखलाते हैं कि अ + क की संख्या में ग − घ की संख्या का भाग दिया है।

७। समान अर्थात् एकरूप दो वा बहुत पदों के गुणनकर्म को घातक्रिया कहते हैं। और समान पदों की संख्या को घातमापक कहते हैं।

यही घातमापक घातक्रिया का द्योतक चिह्न है इस को मूलपद के ऊपर दहिनी ओर लिखते हैं ।

जैसा । अ × अ वा अअ इस के स्थानपर अर्थात् अ को इसी से गुणके जो फल होगा उस के स्थानपर $\text{अ}^{२}$ यों लिखते हैं । और $\text{अ}^{२}$ इस को अ का वर्ग वा अवर्ग कहते हैं ।

ऐसाहि । अ × अ × अ, वा, अअअ के स्थानपर $\text{अ}^{३}$ यह लिखते हैं । और इस को अ का घन वा अघन कहते हैं ।

और अ × अ × अ × इत्यादि न पदों के गुणनफल के स्थानपर $\text{अ}^{\text{न}}$ यों लिखते हैं । और इस को अ का नघात वा अनघात कहते हैं ।

और इसी लिये अ का घातमापक १ है वा अ यह $\text{अ}^{१}$ इस के समान है ।

इसी भांति $(\text{अ}+\text{क})^{२}$, $(\text{अ}+\text{क})^{३}$, $(\text{अ}+\text{क})^{\text{म}}$ ये क्रम से अ + क के वर्ग, घन और मघात को दिखलाते हैं ।

८ । कोइ एक पद जिस किसी दूसरे पद का वर्गादिक घात हो उस दूसरे पद को उस घातरूप पद का वर्गादिमूल कहते हैं । और उस घात के घातमापक को उस मूलरूप पद का मूलमापक कहते हैं । यही मूलमापक $\sqrt{}$ इस चिह्न में रह के मूलक्रिया को दिखलाता है ।

जैसा । $\sqrt[२]{\text{अ}}$ यह अ के वर्गमूल को दिखलाता है । इस को प्रायः $\sqrt{\text{अ}}$ यों ही लिखते हैं ।

$\sqrt[३]{\text{अ}}$ यह अ के घनमूल को दिखलाता है ।

$\sqrt{\text{अ}}$ यह अ के चतुर्घातमूल को दिखलाता है ।

$\sqrt[\text{न}]{\text{अ}}$ यह दिखलाता है कि जितनी न की संख्या होगी उतना अ का मूल लिया है इस को अ का नघातमूल कहते हैं ।

ऐसाहि । $\sqrt{\text{अ}+\text{य}}$ यह अ + य के वर्गमूल को दिखलाता है ।

$क \sqrt[3]{अ - य}$ यह दिखलाता है कि अ - य के घनमूल को क से गुण दिया है ।

सातवे प्रक्रम में जो घातमापकों के लिखने का प्रकार कहा है उस से यह सिद्ध होता है कि घातमापक का छेद मूलमापक है* । इस हेतु से घात और मूल इन के कर्म समान क्रिया से बनने के लिये भिन्नघातमापक के द्वारा मूलक्रिया को दिखलाते हैं ।

जैसा । $अ^{\frac{1}{2}}$ यह अ के एकघात के वर्गमूल को अर्थात् अ के वर्गमूल को दिखलाता है ।

इसी भांति $अ^{\frac{1}{3}}$ यह अ के घनमूल को दिखलाता है । $अ^{\frac{1}{4}}$ यह अ के चतुर्घातमूल को दिखलाता है । और $अ^{\frac{1}{न}}$ यह अ के नघातमूल को दिखलाता है ।

और $अ^{\frac{2}{3}}$ यह दिखलाता है कि अ के वर्ग का घनमूल लिया है वा अ के घनमूल का वर्ग किया है ।

ऐसाहि । $\overline{अ + क}\Big\backslash^{\frac{1}{2}}$ यह वा $(अ + क)^{\frac{1}{2}}$ यह अ + क के वर्गमूल को दिखलाता है । $(अ - य)^{\frac{3}{4}}$ यह अ - य इस के घन के चतुर्घातमूल को वा चतुर्घातमूल के घन को दिखलाता है ।

९ । इस प्रक्रम में दूसरे कितने एक उपयोगी चिह्नों को लिखते हैं ।

(१) :, ::, : यह वा :, =, : यह तीन अवयवों का चिह्न अनुपात को दिखलाता है । जैसा, अ : क :: ग : घ, वा, अ : क = ग : घ, यह दिखलाता है कि अ का क में भाग देने से जो लब्ध होगा वही ग का घ में ।

(२) = यह चिह्न समता को वा एकरूपता को दिखलाता है । जैसा, अ + य = क - ग, यह दिखलाता है कि अ में य को जोड़ देने से जो बनता है सो क में ग को घटा देने से जो बचता है उस के समान है ।

* इस की उपपत्ति (७२) वे प्रक्रम के (६) वीं युक्ति में देखो ।

ऐसाहि । य + अ = र − क = ल + २ ग यह दिखलाता है कि य + अ, र − क और ल + २ ग इन तीनों का मोल समान है ।

(३) जिन दो पदों के बीच में < यह वा > यह चिह्न रहता है उस में जो पद चिह्न के अग्र की ओर रहता है वह दूसरी ओर के पद से न्यून होता है। जैसा। अ > क, वा, क < अ, यह दिखलाता है कि अ से क न्यून है ।

(४) ∽ यह चिह्न अन्तर को दिखलाता है। जैसा, अ ∽ क, यह अ और क इन में जो छोटा होगा उस को बड़े में घटा देने से जो शेष बचेगा उस को दिखलाता है ।

(५) ∵ इस को जिसलिये बोलते हैं ।

(६) ∴ इस को इसलिये बोलते हैं ।

(७) इ०, इत्या०, ... ये हर एक चिह्न इत्यादि के द्योतक हैं ।

१० अङ्कों से वा बीजात्मक अक्षरों से जो संख्या वा राशि दिखलाया जाता है उस को पद कहते हैं सो दो प्रकार का । एक केवल और एक संयुक्त ।

(१) जो पद एक हि संख्या को दिखलाता है वह केवल पद है। जैसा । ७ अ, ९ कग, ५ अय^{२} ।

(२) जहां दो वा तीन इत्यादि अनेक केवल पद परस्पर संबद्ध हैं वह संयुक्त पद है । जैसा । अ + क, वा, य^{२} + २ अय − क ··· ।

संयुक्त पद में जो पहिला पद है सो और जो केवल पद है सो यदि धन हो तो वहां प्रायः धन चिह्न नहीं लिखते । जैसा, यहां अ वा य^{२} ।

संयुक्त पद में जो केवल पद रहते हैं उन के लिखने का कुछ क्रम नहीं है । जैसा । अ + ५ क − ४ ग, वा, अ − ४ ग + ५ क, वा, ५ क − ४ ग + अ, वा, ५ क + अ − ४ ग, वा, − ४ ग + अ + ५ क, वा, − ४ ग

+ ५ क + अ, इन अङ्कों का मोल वही है जो अ और ५ क के योग में ४ ग को घटाने से बचता है।

(३) जिस संयुक्त पद में दो वा तीन इत्यादि केवल पद हैं उस को क्रम से द्वियुक्पद वा त्रियुक्पद इत्यादि कहते हैं और जिस में बहुत केवल पद रहते हैं उस को बहुयुक्पद कहते हैं।

जैसा। अ + क यह द्वियुक्पद है।

$अ^२$ − २ अय + ५ $य^२$ यह त्रियुक्पद है।

अ − ४ क + ५ ग − घ यह चतुर्युक्पद है।

और अ − २ क + ३ ध − ४ च + ५ छ − इ० यह बहुयुक्पद है।

११। जिन के अक्षर और वर्गादिक समान हैं वे पद सजातीय कहलाते हैं। जैसा। ३अ, ७अ, वा, − ५ $अय^२$, ९ $अय^२$, ७ $अय^२$।

१२। जिन के अक्षर और वर्गादिक भिन्नरूप हैं वे पद विजातीय कहलाते हैं। जैसा। ७अ, ५क, वा, ३ अ, ६ अय, ८ $अ^२$।

१३। जो चिह्न सब धन वा सब ऋण हैं वे सजातीय हैं।

१४। विजातीय चिह्न वेही हैं जो कुछ धन और कुछ ऋण हैं।

१५। जब किसी पद का मोल अव्यक्त रहता है तब उस मोल को उन्मिति कहते हैं और जब वह मोल ज्ञात रहता है तब उस को मान कहते हैं।

१६। किसी पद के स्थान में उसी पद के उन्मिती के वा मान के रखने की क्रिया को उत्थापन कहते हैं।

१७। अब इस परिभाषा का अच्छा ज्ञान होने के लिये अलग २ चिह्नों से जुड़े हुए पदों का समुदित मान उत्थापन से जानने के लिये

कुछ उदाहरण लिखते हैं। इन उदाहरणों में अ = ५, क = ४, ग = ३, घ = २, च = १ और छ = ० माना है।

(१) $अ + २क - ग + २घ = ५ + २ \times ४ - ३ + २ \times २$
$= ५ + ८ - ३ + ४ = १७ - ३ = १४$ ।

(२) $अक - (ग - घ) = ५ \times ४ - (३ - २) = २० - १ = १९$ ।

(३) $(अ + ३च)(घ - ४छ) = (५ + ३ \times १)(२ - ४ \times ०) = ८ \times २ = १६$ ।

(४) $\frac{अ + क - (ग - घ)}{अ + क - ग - घ} = \frac{५ + ४ - (३ - २)}{५ + ४ - ३ - २} = \frac{९ - १}{९ - ५} = \frac{८}{४} = २$ ।

(५) $\frac{(अ + क)(ग - घ)}{अ + क ग - घ} = \frac{(५ + ४)(३ - २)}{५ + ४ \times ३ - २} = \frac{९ \times १}{३ + १२} = \frac{९}{१५} = \frac{३}{५}$ ।

(६) $(अ - क)^२ = (५ - ४)^२ = १^२ = १$ ।

(७) $(अ + ४चछ)^३ = (५ + ४ \times १ \times ०)^३ = (५ + ०)^३ = ५^३ = १२५$ ।

(८) $\{अ - (क - ग)^२\}^४ = \{५ - (४ - ३)^२\}^४ = (५ - १^२)^४ = ४^४ =$ २५६ ।

(९) $\sqrt{अ + २क + ग} = \sqrt{५ + २ \times ४ + ३} = \sqrt{८ + ८} = \sqrt{१६}$ $= ४$ ।

(१०) $\sqrt{अ^२ - ३क - \sqrt{अ^२ - ग^२}} = \sqrt{२५ - १२ - \sqrt{२५ - ९}}$ $= \sqrt{९} = ३$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $अ + ५क - य + १३र$ इस का मान क्या है? जो इस में अ = ७, क = २, य = ५ और र = १ ।

उत्तर, २५ ।

(२) अय − २कर + ८गल इस का मान क्या है? जो इस में अ = ४, क = ३, ग = २, य = ५, र = ६ और ल = १ ।

उत्तर, ० ।

(३) अकग − अकय + अगय − कगय इस का मान क्या है? जो इस में अ = ६, क = ५, ग = ३ और य = २ ।

उत्तर, ३६ ।

(४) अ (क + य) + ग (क − य) इस का मान क्या है? जो इस में अ = २, क = ७, ग = ४ और य = ५ ।

उत्तर, ३२ ।

(५) अ^{२} + ३अय − ५य^{२} इस का मान क्या है? जो इस में अ = ६ और य = ३ ।

उत्तर, ४५ ।

(६) (अ + य)^{२} − ३ (अ − य) (क − य) इस का मान क्या है? जो इस में अ = ९, क = ८ और य = ५ ।

उत्तर, १६० ।

(७) (य + र)^{२} − (य^{२} + यर + र^{२}) इस का मान क्या है? जो इस में य = ९ और र = ४ हो ।

उत्तर, ३६ ।

(८) जो अ = ३ और य = १ हो तो $\frac{\text{अ}^{२} + \text{य}^{२}}{\text{अ} - \text{य}} - \frac{\text{अ}^{२} - \text{य}^{२}}{\text{अ} + \text{य}}$ इस का मान क्या होगा?

उत्तर, ३ ।

(९) जो अ = २, क = १३ और ग = ५ हो तो अ $\sqrt[३]{(\text{क} - \text{ग})^{२}} - \sqrt{\text{अ}(\text{क} + \text{ग})}$ इस का मान क्या होगा?

उत्तर, २ ।

(१०) $\sqrt{\{य(य+२र)+८ल\}} + \sqrt[३]{\{ल(२र-ल)^{२}-५य\}}$ इस का मान क्या होगा ? जो इस में य = ३, र = ४ और ल = ६ हो ।

उत्तर, १२ ।

१८ । इस शास्त्र में कितनी एक प्रत्यक्ष बातें बहुत उपयोगी हैं जिन को सिद्ध करने के लिये कुछ उपपादन नहीं करने पड़ता । और जिन को सुनते हि सब लोग मान्य करते हैं उन को लिखते हैं ।

(१) जितने राशि हर एक किसी दूसरे राशी के समान हैं वे सब परस्पर समान हैं ।

(२) समान दो राशिओं में समान हि मिलाने से वा घटाने से वा उन को समान से गुण देने से वा उन में समान का भाग देने से उन का समत्व बिगड़ता नहीं ।

(३) जिन दो राशियों का अन्तर जितना होता है वे यदि एक हि राशि से अधिक वा न्यून किये जावें तोभी उन का अन्तर उतना हि रहता है ।

(४) जिन दो राशियों का योग जितना होता है उन में से एक राशि यदि किसी एक राशि से अधिक किया जावे और उसी से दूसरा न्यून किया जावे तोभी उन अधिक और न्यून किये हुए राशिओं का योग उतना हि होता है ।

(५) न्यून और अधिक दो राशिओं को एक हि राशि से गुण देओ वा भाग देओ तोभी क्रम से वे न्यून और अधिक हि रहते हैं ।

(६) जितने राशि हर एक किसी एक हि राशि से द्विगुण वा अधिक गुण हैं अथवा किसी एक हि राशि के आधे वा कोइ अंश हैं वे सब राशि परस्पर समान हैं ।

(७) जो राशि किसी दूसरे राशि से जोड़ के घटाया जावे वा गुण के भागा जावे तोभी वह राशि जों का त्यों रहता है ।

(८) कोइ राशि अपने अंश से बड़ा होता है और अपने सब अंशों के योग के समान होता है ।

अध्याय २ ।

इस में संकलन, व्यवकलन इत्यादि छ परिकर्म और प्रकीर्णक हैं ।

संकलन ।

१९ । यहां संकलनीय पदों को अपने २ धन ऋण चिह्न के साथ अलग २ लिखने से जो बनता है सो संकलित अर्थात् योग है* । इस में यदि कुछ सजातीय पद हों तो उन को मिला के एक हि पद कर देओ और यदि विजातीय पद हों तो उन को अपने २ धन ऋण चिह्न के साथ अलग २ लिखो सो हि उन का योग है† ।

यहां सजातीय संकलनीय पदों का संकलन दो प्रकार का है ।

पहिला प्रकार । जब सजातीय संकलनीय पदों के चिह्न सजातीय हैं ।

२० । रीति । संकलनीय पदों के संख्यात्मक वारद्योतकों का व्यक्त-गणित की रीति से योग करो और उस योग के पीछे सजातीय पद के अक्षर वा अक्षरों को लिख के पूर्व में द्योतक चिह्न जो धन वा ऋण होगा सो लिखो ।

---

* इस की युक्ति यह है। + अ और + क इन का योग परिभाषा से + अ + (+ क) यह है । अब चौथी प्रत्यक्ष बात से ।

+ अ + (+ क) = + अ + क + (+ क − क) = + अ + क + ० = अ + क ।

ऐसाहि । − अ, − क इन का योग = − अ + (− क)

= − अ − क + (− क + क) = − अ − क + ० = − अ − क ।

इस से स्पष्ट है कि पदों को अपने २ धन ऋण चिह्न के साथ अलग २ लिखने से संकलन बनता है ।

† इस की युक्ति यह है । यदि अ एक रुपया का द्योतक हो और क एक पैसे का द्योतक हो तो अ और क इन दोनों का योग दो रुपये भी न होगा दो पैसे भी न होगा किन्तु अ + क एक रुपया और एक पैसा यही होगा । भास्कराचार्यजी ने भी कहा है कि (योगोन्तरं तेषु समानजात्योर्विभिन्नजात्योश्च पृथक् स्थितिः स्यात्)

उदाहरण ।

(१)	(२)	(३)
५ अ	−५ क^{२}	५ यर − ल^{२}
४ अ	−७ क^{२}	२ यर − ४ ल^{२}
अ	−२ क^{२}	३ यर − ६ ल^{२}
१० अ	−१४ क^{२}	१० यर − ११ ल^{२}

(१) यहां ५ अ, ४ अ और अ इन का योग १० अ होता है । क्योंकि अ यह एक हि पदार्थ पांच बेर, चार बेर और एक बेर मिल के दस हि बेर होगा यह स्पष्ट है ।

(२) यहां −५ क^{२}, −७ क^{२} और −२ क^{२} इन का योग −१४ क^{२} होता है । इस का भी कारण स्पष्ट हि है कि जो क^{२} यह एक हि पदार्थ पांच बेर, सात बेर और दो बेर ऋण किया जावे तो वह पदार्थ चौदह बेर ऋण होगा ।

(३) इस में पहिले ५ यर, २ यर और ३ यर इन का योग १० यर और −ल^{२}, −४ ल^{२} और −६ ल^{२} इन का योग −११ ल^{२} होता है । अब १० यर और −११ ल^{२} ये दोनो विजातीय हैं इसलिये इन का १० यर −११ ल^{२} यही योग है ।

दूसरा प्रकार । जब सजातीय संकलनीय पदों के चिह्न विजातीय हैं ।

२१ । रीति । धन वारद्योतकों का और ऋण वारद्योतकों का अलग २ योग करो फिर जिस योग की संख्या अधिक हो उस में जिस की संख्या न्यून हो उस को घटा के जो शेष बचेगा उस के आदि में अधिक योग का चिह्न लिखो और उस के पीछे सजातीय पद लिख देओ ।

उदा॰

(४)	(५)	(६)
७ अ	−३ क^{२} + ५ अय^{२}	अ^{२} − ३ अक + २ क^{२}
−३ अ	१३ क^{२} − ३ अय^{२}	४ अ^{२} + ७ अक − ५ क^{२}
−२ अ	−४ क^{२} + अय^{२}	२ अ^{२} − ५ अक + ६ क^{२}
अ	९ क^{२} − १० अय^{२}	८ अ^{२} + अक − ९ क^{२}
३ अ	१५ क^{२} − ७ अय^{२}	१५ अ^{२} − ६ क^{२}

(४) इस में पहिले ७अ और अ इन का योग ८अ। फिर −३अ और −२अ इन का योग −५अ है। अब ८अ, और −५अ इन का योग ८अ −५अ, वा, ३अ है।

इसी भांति पांचवें और छठवें उदाहरण में भी योग जानो।

२२। अब यदि संकलनीय पदों में सजातीय पदों के नीचे सजातीय पद न होवें तो जो२ सजातीय पद इधर उधर होंगे उन पदों को खोज के उन के अलग२ योग करो फिर वे योग और जितने शेष विजातीय पद होंगे उन सभों को अपने२ धन वा ऋण चिह्न के साथ अलग२ लिखो।

उदा॰ (१)

$$\begin{array}{rl} & २कग - २अक + ग^२ \\ & क^२ - ५ - २कग + क^३ \\ & अ^२ + ५अक - क^२ \\ & १७ - २ग^२ + कग - ३अक \\ \hline योग & कग - ग^२ + १२ + क^३ + अ^२ \end{array}$$

यहां

$$२कग - २कग + कग = कग$$
$$-२अक + ५अक - ३अक = ०$$
$$ग^२ - २ग^२ = -ग^२$$
$$क^२ - क^२ = ०$$
$$-५ + १७ = १२$$

और

$$क^३ = क^३$$
$$अ^२ = अ^२$$

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) २अ, ८अ, अ, और १४अ इन का योग करो।

उत्तर, २५अ।

(२) ६अ^२ + ७अक, १३अ^२ + २अक, अ^२ + ५अक और ९अ^२ + ४अक इन का योग क्या होगा?

उत्तर, २९अ^२ + १८अक।

(३) ५य^२ + ७अ, ३य^२ + २अ, ८य^२ + ३अ और १३य^२ + अ इन को जोड़ो।

उत्तर, २९य^२ + १३अ।

(४) १२ $य^2$ − २ यल + $ल^2$, ३ $य^2$ − ५ यल + ७ $ल^2$, ११ $य^2$ − ३ यल + २ $ल^2$ और ९ $य^2$ − ४ यल + ८ $ल^2$ इन का योग क्या है?

उत्तर, ३५ $य^2$ − १४ यल + १८ $ल^2$ ।

(५) ७ य + ६ र + २ ल, ४ य + ५ र + ९ ल, ६ य + ३ र + ल और ८ य + ५ र + ४ ल इन का योग क्या है?

उत्तर, २५ य + १९ र + १६ ल ।

(६) ४ $अ^2$ − ५ अक + ७ $ग^2$, − ५ $अ^2$ − ९ अक + ३ $ग^2$, ८ $अ^2$ + १२ अक − $ग^2$ और ९ $अ^2$ − अक + २ $ग^2$ इन का योग क्या होता है ?

उत्तर, १६ $अ^2$ − ३ अक + ११ $ग^2$ ।

(७) ८ $अ^2$ − ९ $य^2$, २ $अ^2$ − ३ $य^2$, ५ $अ^2$ − १० $य^2$ और ६ $अ^2$ − ७ $य^2$ इन को इकट्ठा करो ।

उत्तर, २१ $अ^2$ − २९ $य^2$ ।

(८) $य^3$ − ५ $अय^2$ + ७ $अ^2य$ − $अ^3$, ५ $य^3$ + ४ $अय^2$ − ४ $अ^2य$ − २ $अ^3$, ३ $य^3$ − ७ $अय^2$ + ५ $अ^2$ य − ३ $अ^3$ और ४ $य^3$ + २ $अय^2$ − ८ $अ^2$ य + ९ $अ^3$ इन का योग कहो ।

उत्तर, १३ $य^3$ − ६ $अय^2$ + ३ $अ^3$ ।

(९) $अय^2$ + ५ कय − ७ ग, ३ $अय^2$ + ८ कय − २ ग, ५ $अय^2$ + ९ कय − ४ ग और ७ $अय^2$ + कय − ६ ग इन का योग क्या होगा ?

उत्तर, १६ $अय^2$ + २३ कय − १९ ग ।

(१०) ३ $क^2ग$ − ७ $घ^2च^2$, ४ $क^2ग$ + ३ $घ^2च^2$, − ७ $क^2ग$ − $घ^2च^2$, २ $क^2ग$ + २ $घ^2च^2$ और − ५ $क^2ग$ + ९ $घ^2च^2$ इन को जोड़ के योग कहो ।

उत्तर, − ३ $क^2ग$ + ६ $घ^2च^2$ ।

(११) ५ $य^3$ − ७ $य^2$ + ४ य + १७, − २ $य^3$ + ५ $य^2$ + ११ य − ८, ७ $य^3$ + ९ $य^2$ − ६ य + ३, ८ $य^3$ − $य^2$ + ७ य + ४ और − १३ $य^3$ + २ $य^2$ − १६ य + ५ इन का योग कहो ।

उत्तर, ५ $य^3$ + ८ $य^2$ + २१ ।

(१२) ६ य^{५} + ४ अय^{४} − ७ अ^{२}य^{३} + १० अ^{३}य^{२} − २ अ^{४} य + ८ अ^{५}, ९ य^{५} − ३ अय^{४} + ५ अ^{२}य^{३} + ४ अ^{३}य^{२} − ७ अ^{४}य + ११ अ^{५}, − ८ य^{५} + अय^{४} − ३ अ^{२}य^{३} − ५ अ^{३}य^{२} − २ अ^{४}य − ६ अ^{५}, − २ य^{५} − २ अय^{४} − ४ अ^{२}य^{३} − ४ अ^{३}य^{२} + ६ अ^{४}य + ४ अ^{५} और ७ य^{५} + ८ अय^{४} + ६ अ^{२}य^{३} + ९ अ^{३}य^{२} − ५ अ^{४}य − १० अ^{५} इन का योग करो ।

उत्तर, १२ य^{५} + ८ अय^{४} − ३ अ^{२}य^{३} + १४ अ^{३}य^{२} − १० अ^{४}य + ७ अ^{५} ।

(१३) अ^{२} + ७ अय − ५ क^{२} − ४ ग^{२}, ग^{३} − ४ क^{२} + ७ अ^{२} + अय, अय + ५ ग^{२} − २ य^{२} + ५ र^{२} और ४ क^{२} − ४ घ − २ अय + २ अ^{२} इन का योग क्या होता है?

उत्तर, १० अ^{२} + ७ अय − ५ क^{२} + ग^{२} + ग^{३} − २ य^{२} + ५ र^{२} − ४ घ ।

(१४) ७ य^{२} + ९ यर − ८ र^{२}, ६ यर − ४ य^{२} + २ र^{२}, − २ र^{२} + ५ य^{२} + ५ यर, १२ य^{२} − ११ र^{२} − ७ यर और ८ यर + ३ र^{२} + १० य^{२} इन को जोड़ो ।

उत्तर, ३० य^{२} + २१ यर − १६ र^{२} ।

(१५) ४ अ^{३} − ८ अ^{२}य + ५ अय^{२}, ७ अ^{२}य + ४ अय^{२} − ९ य^{३}, ८ य^{३} + ५ अ^{३} − ११ अ^{२}य, और − १३ अय^{२} − ७ य^{३} + ९ अ^{३} इन को जोड़ो ।

उत्तर, १८ अ^{३} − १२ अ^{२}य − ४ अय^{२} − ८ य^{३} ।

(१६) यर − ३ ल^{२} + ४ अक − ५ क^{२}, ४ क − २ क^{२} + ७ यर − अ^{२}, ७ क^{२} + ३ अक + २ ल^{२} + य^{२}, और ५ अक + ४ अ − २ क + अ^{२} इन का योग क्या है ?

उत्तर, ८ यर − ल^{२} + १२ अक + २ क + य^{२} + ४ अ ।

(१७) ८ अ − ९ आ + ४ इ, अ − ५ आ + २ इ, ७ अ − ३ आ + इ और ४ अ − आ + ६ इ इन का योग क्या होता है ?

उत्तर, २० अ − १८ आ + १३ इ ।

(१८) ६ क + ४ ग − २ घ, ३ क − १३ ग + ९ घ, − ९ क − ग + ७ घ, और क + ५ ग − १० घ इन का योग क्या होता है ?

उत्तर, क − ५ ग + ४ घ ।

(१९) ३च − २छ + ९ज, ५ज − ३च − ८झ, − ३झ − ५ज + ८छ और ७ज − ४छ + ११झ इन का योग क्या होता है?

उत्तर ८च − ६छ + १६ज ।

(२०) ६अ^{४} + ५अ^{३}क + ४अ^{२}क^{२}, − २अ^{३}क + ३अ^{२}क^{२} − ७अक^{३} ६अ^{२}क^{२} − ८अक^{३} + ६क^{४}, − ७अक^{३} + क^{४} − ५अ^{४} और ३क^{४} + ७अ − १५अ^{३}क इन को जोड़ो ।

उत्तर, ८अ^{४} − १२अ^{३}क + १३अ^{२}क^{२} − २२अक^{३} + १०क^{४} ।

(२१) २य^{७} − ४य^{५}र^{२} + २य^{३}र^{४}, ६य^{६}र + ५य^{४}र^{३} − ८य^{२}र^{५}, ४य^{५}र − २य^{३}र^{४} + ९यर^{६}, − ३य^{४}र^{३} + य^{२}र^{५} − ३र^{७} और ५य^{३}र^{४} − ३यर^{६} + ८य^{७} इन का योग करो ।

उत्तर, १०य^{७} + ६य^{६}र + २य^{४}र^{३} + ५य^{३}र^{४} − ७य^{२}र^{५} + ६यर^{६} − ३र^{७} ।

(२२) ६अ^{३} + ११अ^{२}क − १०अक^{२} − १९अ^{२}ग, − ६अ^{२}क − ११अक^{२} − १०क^{३} + १९अकग, ६अ^{२}ग + ११अकग − १०क^{२}ग − १९अग^{२} + १९कग^{२} और १९अकग − ७अग^{२} − १९क^{२}ग + ७कग^{२} − ७ग^{३} इन का योग करो ।

उत्तर, ६अ^{३} + ५अ^{२}क − २१अक^{२} − १०क^{३} − १३अ^{२}ग + ४९अकग − २९क^{२}ग − २६अग^{२} + २६कग^{२} − ७ग^{३} ।

(२३) ५अ^{३} + ३अ^{२}य − ७अय^{२} + य^{३}, ९य^{३} − १२अ^{३} + ७अ^{२}य − ५अय^{२}, ४अ^{२}य + ३अय^{२} − ५य^{३} − ७अ^{३}, अय^{२} − ५अ^{२}य + ११अ^{३} − ७य^{३} और ८अय^{२} + २य^{३} + ३अ^{३} − ९अ^{२}य इन का योग करो ।

उत्तर, ० ।

(२४) अय$^{\frac{१}{२}}$ − २यर$^{\frac{१}{३}}$ + ३$\sqrt{अ+क}$ + ४ल$\sqrt{द}$, ३अय$^{\frac{१}{२}}$ − ५यर$^{\frac{१}{३}}$ − ४$\sqrt{अ+क}$ + ७ल$\sqrt{द}$, − ५अय$^{\frac{१}{२}}$ + यर$^{\frac{१}{३}}$ + ५$\sqrt{अ+क}$ − २ल$\sqrt{द}$ और २अय$^{\frac{१}{२}}$ + ९यर$^{\frac{१}{३}}$ − ११$\sqrt{अ+क}$ − ९ल$\sqrt{द}$ इन का योग क्या होता है?

उत्तर, अय$^{\frac{१}{२}}$ + ३यर$^{\frac{१}{३}}$ − ७$\sqrt{अ+क}$ ।

(२५) ३ (अ + य)^२ – ४ क (अ + य) + ७ ग^२, ७ (अ + य)^२ + ९ क (अ + य) + ५ ग^२, – ४ (अ + य)^२ + २ क (अ + य) – ६ ग^२, (अ + य)^२ – ३ क (अ + य) – २ ग^२ और ८ (अ + य)^२ – ७ क (अ + य) – ६ ग^२ इन का योग क्या होगा?

उत्तर, १५ (अ + य)^२ – ३ क (अ + य) – २ ग^२ ।

---

२ व्यवकलन ।

२३ । रीति । जिस पद में किसी दूसरे पद को घटाना हो उस पद को ऊपर लिख के उस के नीचे उस दूसरे पद को लिखो ऐसा कि जिस से सजातीय पदों के नीचे सजातीय पद आवें । फिर नीचे लिखे हुए पद में जो २ केवल पद धन वा ऋण होगा उस का द्योतक चिह्न जो धन हो तो ऋण और ऋण हो तो धन करो वा वैसा किया समझो। फिर योग की रीति से उन का योग करो वही अन्तर होगा* ।

उदा० (१) १३ अ	(२) – ७ कग^२	(३) ९ य – ५ र
८ अ	– ३ कग^२	४ य + २ र
५ अ	– ४ कग^२	५ य – ७ र

(१) यहां ८ अ को ऋण करके १३ अ में जोड़ देने से ५ अ अन्तर हुआ ।

(२) यहां – ३ कग^२ को धन करके – ७ कग^२ में जोड़ देने से – ४ कग^२ अन्तर सिद्ध हुआ ।

---

* इस की युक्ति यह है । + अ, और + क, इन का परिभाषा से अन्तर + अ – (+ क) यह है ।

अब तीसरी प्रत्यक्ष बात से

अ – (+ क) = अ – क – (+ क – क) = अ – क, वा अ + (– क)

ऐसाहि + अ, – क इन का अन्तर = अ – (– क)

= अ + क – (– क + क) = अ + क, वा अ + (+ क)

इस से स्पष्ट है कि घटाने के पद के धन ऋण चिह्न का व्यत्यास कर के उस को जोड़ देना यही व्यवकलन है ।

(३) यहां ९य−४य=५य, और −५र−२र=−७र इस लिये ९य−५र−(४य+२र) =५य−७र यह अन्तर है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) ९य में ५य को और १३ अय² में − अय² को घटा के शेष कहो ।

उत्तर, ४य और १४ अय² ।

(२) ६अ+११क इस में २अ+८क इस को घटा देने से शेष क्या रहेगा ?

उत्तर, ४अ+३क ।

(३) २अ−९य² इस को ५अ−७य² इस में और −९य+१५र इस को १७य+८र इस में घटा देओ ।

उत्तर, −३अ+२य² और २६य−७र ।

(४) ९अय−८कल² इस में ७अय−११कल² इस को घटा देओ ।

उत्तर, २अय+३कल² ।

(५) १५अ²+२क² इस में १२अ²−३क² इस को और −६य² −७यर इस को −३य²+५यर इस में घटा देओ ।

उत्तर, ३अ²+५क² और ३य²+१२यर ।

(६) ५अय²+९कर इस में ८अय²−३कर+५ल³ इस को घटा देओ ।

उत्तर, −३अय²+१२कर−५ल³ ।

(७) ७अय−९कर+८गल इस में ३अय−५कर+५गल इस को घटा देओ ।

उत्तर, ४अय−४कर+३गल ।

(८) ५अ²−३य+५क−४ग इस में ३ग−४अ²+८घ−य इस को घटा देओ ।

उत्तर, ९अ²−२य+५क−७ग−८घ ।

(९) $-६ य^2 + ४ यर - ३ र^2$ इस को $९ य^2 - ५ यर + ८ र^2$ इस में घटा के शेष कहो ।

उत्तर, $१५ य^2 - ९ यर + ११ र^2$ ।

(१०) $२ अ^3 + ३ अ^2य + ४ अय^2 + ५ य^3$ इस को $५ अ^3 - ७ अ^2य + ६ अय^2 - ४ य^3$ इस में घटा देने से शेष क्या रहेगा ?

उत्तर, $३ अ^3 - १० अ^2य + २ अय^2 - ९ य^3$ ।

(११) $५ अय^2 + ७ कयर - ९ गर^2$ इस में क्या जोड़ देने से योग $८ अय^2 + ४ कयर + ३ गर^2$ इतना होगा ?

उत्तर, $३ अय^2 - ३ कयर + १२ गर^2$ ।

(१२) $अ^2 + ४ अक - ५ अग + २ क^2 - ३ कग$ इस में $३ अक - ५ ग^2 + २ क^2 + ७ अग - ९ अ^2$ इस को घटाने से शेष क्या रहेगा ?

उत्तर, $१० अ^2 + अक - १२ अग - ३ कग + ५ ग^2$ ।

(१३) $-७ य^3 - १३ य^2 + २ य - ९$ इस से $१८ य^3 - १५ य^2 + ७ य + १२$ यह कितना अधिक है ?

उत्तर, $२५ य^3 - २ य^2 + ५ य + २१$ ।

(१४) $-५ अ^2 + ३ अय - ८$ इस को $-८ अ^2 - ९ अय + १७$ इस में घटा देओ ।

उत्तर, $-३ अ^2 - १२ अय + २५$ ।

(१५) $६ य^4 + ४ य^3र - २ य^2र^2 + ५ यर^3 - ७ र^4$ इस में $-२ य^4 + ५ य^3र - ७ य^2र^2 + यर^3 + ८ र^4$ इस को घटा देओ ।

उत्तर, $८ य^4 - य^3र + ५ य^2र^2 + ४ यर^3 - १५ र^4$ ।

(१६) $अ^2 + अक + क^2 - १५$ इस में $क^2 - ५ कग - ग^2 - १२$ इस को घटा देओ ।

उत्तर, $अ^2 + अक + ५ कग + ग^2 - ३$ ।

(१७) $८ य^5 - ७ य^4 + १९ य^3 + ३ य^2 - ५ य + १३$ इस में $-१५ + २ य - य^2 + ४ य^3 + ६ य^4 - ९ य^5$ इस को घटा देओ ।

उत्तर, $१७ य^5 - १३ य^4 + १५ य^3 + ४ य^2 - ७ य + २८$ ।

(१८) ७अ−९क+२य इस में −७ग+३र इस को घटा देओ।

उत्तर, $\quad$ ७अ−९क+७ग+२य−३र ।

(१९) ७(य+र)^{२} −५ (य+र) ल−१३ल^{२} इस में ६ (य+र)^{२}−८ (य+र) ल+१२ल^{२} इस को घटा के शेष कहो ।

उत्तर, $\quad$ (य+र)^{२}+३(य+र)ल−२५ल^{२} ।

(२०) २य−३कर$^{\frac{१}{२}}$−४$\sqrt[३]{६}$+५$\sqrt{अ−य}$ इस को ७य+६कर$^{\frac{१}{२}}$ +५$\sqrt[३]{६}$+२$\sqrt{अ−य}$ इस में घटा देने से शेष क्या रहेगा ?

उत्तर, $\quad$ ५य+९कर$^{\frac{१}{२}}$+९$\sqrt[३]{६}$−३$\sqrt{अ−य}$ ।

संकलन और व्यवकलन में कोष्ठ की व्याप्ति ।

२४ । जिस कोष्ठ के आदि में धन चिह्न लगा है वह दिखलाता है कि उस कोष्ठ के भीतर का पद जोड़ा हुआ है* । इस लिये उस कोष्ठ को मिटा देने से भी उस भीतर के पद का मोल यथास्थित हि रहेगा क्यों कि जोड़ने के पद को अपने चिह्न के साथ अलग लिखने से योग बनता है ।

और जिस कोष्ठ के आदि में ऋण चिह्न लगा है वह द्योतित करता है कि उस कोष्ठ के भीतर का पद घटा हुआ है । इस लिये यदि ऋण चिह्न से जुड़े हुए कोष्ठ को मिटा देना हो तो उस के भीतर जितने केवल पद हों उन सभों के धन ऋण चिह्न को पलटा देओ क्यों कि उस पद को घटा देना है ।

यदि किसी पद के कोष्ठ के भीतर और कितने एक कोष्ठ हों और उन सभों को उड़ा देना हो तो उतनी बेर यह पहिला कर्म करने से सब कोष्ठ उड़ जायेंगे । जैसा,

---

* चौथे प्रक्रम में देखो ।

(१) अ + (+ क) = अ + क ।

(२) य + (− र) = य − र ।

(३) अ + (क − ग) = अ + क − ग ।

(४) (य^{२} − ३ य − ७) + (य^{२} + २ य + ७)
= य^{२} − ३ य − ७ + य^{२} + २ य + ७ = २ य^{२} − य ।

(५) अ − (+ क) = अ − क ।

(६) प − (− फ) = प + फ ।

(७) अ − (क − ग) = अ − क + ग ।

(८) (य^{२} + २ यर + ५ र^{२}) − (य^{२} − ४ यर − २ र^{२}) = ६ यर + ७ र^{२} ।

(९) अ − (अ − क) + (२ अ + क) − (अ − ३ ग) = अ + २ क + ३ ग ।

(१०) २ अ − {अ − (अ − क)} = २ अ − अ + (अ − क)
= अ + अ − क = २ अ − क ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) (अ − क) + (क − ग) = अ − ग ।

(२) (अ^{२} + २ अक − ४ क^{२}) + (३ अ^{२} − ५ अक + ४ क^{२}) = ४ अ^{२}
− ३ अक ।

(३) ४ य − ५ र + २ ल + (३ य + ७ र − ५ ल) = ७ य + २ र − ३ ल ।

(४) (य + २ र) − (य − ५ र) = ७ र ।

(५) (अ + क) − (क + ग) + (ग + घ) − (घ + च) = अ − च ।

(६) (य^{२} + ३ यर + र^{२}) − (य^{२} − ५ यर + २ र^{२}) = ८ यर − र^{२} ।

(७) ४ अक − {(अ^{२} + २ अक + क^{२}) − (अ^{२} − २ अक + क^{२})} = ० ।

(८) ५ य^{३} + २ र^{३} − (३ य^{२}र − यर^{२}) − {३ य^{३} − ७ र^{३} + (२ य^{२}र + यर^{२})}
= २ य^{३} − ५ य^{२}र + ९ र^{३} ।

(९) ७ अ^{२} + {२ अ^{२} − (५ अक − क^{२})} − {६ अ^{२} − (२ अक + ९ क^{२})}
= ३ अ^{२} − ३ अक + १० क^{२} ।

(१०) ४ य^{२} + ५ यर − (३ य^{२} + {२ यर − (६ य^{२} − ५ र^{२})})
= ७ य^{२} + ३ यर − ५ र^{२} ।

२५ । अनुमान १ । धन चिह्न से जुड़े हुए कोष्ठ में किसी पद को लिखने से उस का मोल बिगड़ता नहीं । और ऋण चिह्न से जुड़े हुए कोष्ठ में किसी पद को लिखने से उस पद में जो केवल पद होंगे उन सभों के धन ऋण चिह्न को पलट देने से उस पद का मोल नहीं बिगड़ता ।

जैसा, अ+२क—३ग+५घ=अ+(२क—३ग+५घ)
=अ+२क+(—३ग+५घ) ।

और २अ—३क—५ग+घ=२अ—(३क+५ग—घ)
=२अ—३क—(५ग—घ) ।

२६ । अनुमान २ । कोष्ठ का धन ऋण चिह्न पलट के जो उस के भीतर के सब केवल पदों के धन ऋण चिह्न को भी पलट दिया जावे तो उस कोष्ठविशिष्ट पद का मोल बिगड़ता नहीं ।

जैसा, अ+(क—ग)र=अ—(—क+ग)र,
य—अ(२क—५र)=य+अ(—२क+५र),
—४(अ—२क+३ग)=४(—अ+२क—३ग) ।

जिन सजातीय पदों के वारद्योतक अक्षरात्मक हैं उन का संकलन ।

२७ । जब सजातीय संकलनीय पदों के चिह्न सजातीय हैं तब यदि वारद्योतक केवल पद हों तो उन वारद्योतकों को धन चिह्न के साथ कोष्ठ में अलग२ लिखो । और यदि वारद्योतक संयुक्त पद हों तो उन का योगरीति से योग करके उस को कोष्ठ में लिखो फिर उस कोष्ठ के पीछे सजातीय पद लिख के आदि में द्योतक चिह्न जो धन वा ऋण होगा सो लिख देओ ।

उदा० (१)	अय—२गर	(२)	(त+३थ) अ—(४प—३फ) य
	३कय— घर		(३त—५थ) अ—(३प+५फ) य
	४चय—५छर		(२त+९थ) अ—(प—७फ) य
	(अ+३क+४च)य—(२ग+घ+५छ)र ।		(६त+७थ) अ—(८प—५फ) य ।

२८ । जब सजातीय संकलनीय पदों के चिह्न विजातीय हैं तब यदि वारद्योतक केवल पद हों तो उन केवल पदों को अपने२ धन ऋण चिह्न के साथ एक कोष्ठ में लिख के उस कोष्ठ के आदि में धन चिह्न लिखो और उस कोष्ठ के पीछे सजातीय पद लिख देओ । और यदि वारद्योतक संयुक्त पद हों तो वहां जितने संकलनीय पद ऋण चिह्न से जुड़े होंगे उन को (२६) वे प्रक्रम के अनुसार धन चिह्न से युक्त करो वा जितने धन चिह्न से युक्त होंगे उन को (२६) वे प्रक्रम से ऋण चिह्न से युक्त करो यों संकलनीय पदों के चिह्नों को सजातीय कर के (२७) वे प्रक्रम से उन का योग करो ।

उदा० (१) ३ अय + ३ पर (२) (३ अ − २ क) र − (च + ६ ज) ल
कय − २ फर − (२ अ − ५ क) र + (३ च − ज) ल
− ५ गय − ४ बर (७ अ + ४ क) र − (९ च + २ ज) ल

(३ अ + क − ५ ग) य + (३ प − २ फ − ४ ब) र । (८ अ + ७ क) र − (७ च + ९ ज) ल

जिन सजातीय दो पदों के वारद्योतक अक्षरात्मक हैं उन का व्यवकलन ।

२९ । रीति । घटाने के पद का धन ऋण चिह्न पलटा के अव्यवहित प्रक्रमों से योग करो ।

उदा० (१) अय − कल (२) (७ अ − प) य + (ग + ५ फ) र
गय + घल (२ अ + ३ प) य − (४ ग − फ) र

(अ − ग) य − (क + घ) ल । (५ अ − ४ प) य + (५ ग + ४ फ) र ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) अय − घर + २ जल, ५ कय − ३ चर − ९ झल और ८ गय − ४ छर + १२ ल इन का योग क्या होता है ?

उत्तर, (अ + ५ क + ८ ग) य − (घ + ३ च + ४ छ) र + (२ ज − ९ झ + १२) ल ।

(२) ३ पय + ५ फर, ७ बय − ४ मर, और − ८ य + बर इन का योग करो ।

उत्तर, (३ प + ७ ब − ८) य + (५ फ − ४ म + ब) र ।

(३) अय − कर + गल − घव, कय − गर − घल + चव,

गय − घर + चल + छव, घय − चर − छल − जव

इन चार पदों का योग क्या होता है ?

उत्तर, (अ + क + ग + घ) य − (क + ग + घ + च) र + (ग − घ + च − छ) ल − (घ − च − छ + ज) व ।

(४) ७ अय^2 − ५ कय + २ग, − २ कय^2 + ३ गय − घ, − ५ घय^2 − ७ अय + १७ और ४ गय^2 + २ पय + ७ फ इन का योग क्या होगा ?

उत्तर, (७ अ − २ क + ४ ग − ५ घ) य^2 − (५ क − ३ ग + ७ अ − २ प) य + २ग − घ + १७ + ७ फ ।

(५) अय^2 + कयर + गर^2, चयर + छर^2 + जय^2 और − तर^2 + थय^2 − दयर इन को जोड़ो ।

उत्तर, (अ + ज + थ) य^2 + (क + च − द) यर + (ग + छ − त) र^2 ।

(६) (अ + क − ग) य + (त + थ + द) र, (अ − क + ग) य + (त + थ − द) र, (− अ + क + ग) य + (त − थ + द) र, और (अ + क + ग) य + (− त + थ + द) र इन का योग कहो ।

उत्तर, (२ अ + २ क + २ ग) य + (२ त + २ थ + २ द) र ।

(७) (अ + ३ क) य^2 + (४ अ − ५) यर + (३ अ − ७ ग) र^2, (२ अ − क) य^2 − (अ + ४ क) यर − (अ + ५ ग) र^2, (५ अ + २ क) य^2 + (३ अ + ५) यर − (२ अ + ग) र^2 और (अ + ४ क) य^2 − (अ − क) यर − २ अर^2 इन का योग क्या होता है?

उत्तर, (९ अ + ८ क) य^2 + (५ अ − ३ क) यर − (६ अ − ग) र^2 ।

(८) (अ − क + ग) य^2 − (त + थ − द) यर + (२ प^2 + फ) र^2, (क − ग − घ) य^2 + (थ + द − ध) यर − (४ प^2 − ३ फ) र^2, (घ − च + छ) य^2 + (द + ध + न) यर

−(प^{२} − ७ फ) र^{२}, और (च − छ + ज) य^{२} + (त − ३ द − न) यर + (५ प^{२} − ६ फ) र^{२} इन का योग क्या है?

उत्तर,　(अ + ज) य^{२} + (२ प^{२} − ९ फ) र^{२} ।

(९) (२ य + ३ र) य^{२} + (५ र − ७ ल) यर − (५ ल − य) र^{२}, (य − ५ र) य^{२} − (४ र + ३ ल) यर + (३ ल + य) र^{२}, (३ य − र) य^{२} − (र − ११ ल) यर − (ल − २ य) र^{२} और (५ य + र) य^{२} − (२ र + ५ ल) यर + (२ ल − ३ य) र^{२} इन का योग क्या होता है?

उत्तर,　(११ य − २ र) य^{२} − (२ र + ४ ल) यर − (ल − य) र^{२} ।

(१०) (अ^{३} + २ अ^{२}क) य − (क^{३} + ५ क^{२}ग) र + (ग^{३} + ४ ग^{२}घ) ल, (३ अ^{२}क − २ अक^{२}) य + (५ क^{२}ग + ३ कग^{२}) र − (४ ग^{२}घ − ५ गघ^{२}) ल और (२ अक^{२} − क^{३}) य − (४ कग^{२} − ५ ग^{३}) र + (२ गघ^{२} + ७ घ^{३}) ल इन का योग क्या होता है?

उत्तर,　(अ^{३} + ५ अ^{२}क − क^{३}) य − (क^{३} + कग^{२} − ५ ग^{३}) र + (ग^{३} + ७ गघ^{२} + ७ घ^{३}) ल ।

(११) (३ अ^{२} − २ अक) य^{३} − (४ च^{२} + चछ) य^{२}र + (त^{२} − ५ तथ) यर^{२} − (२ प^{२} + ३ पफ) र^{३}, (३ चछ − ७ छ^{२}) य^{२}र − (६ तथ − ३ थ^{२}) यर^{२} + (७ प^{२} − ८ पफ) र^{३} + (अक − ५ ग^{२}) य^{३}, − (२ त^{२} + ९ थ^{२}) यर^{२} − (४ प^{२} + फ^{२}) र^{३} + (७ अक + ९ ग^{२}) य^{३} − (२ च^{२} + ९ चछ) य^{२}र और (९ पफ − ५ फ^{२}) र^{३} − (४ थ^{२} − त^{२}) यर^{२} + (८ छ^{२} − ५ च^{२}) य^{२}र − (२ अ^{२} + ७ ग^{२}) य^{३} इन का योग करो ।

उत्तर,　(अ^{२} + ६ अक − ३ ग^{२}) य^{३} − (११ च^{२} + ७ चछ − छ^{२}) य^{२}र − (११ तथ + १० थ^{२}) यर^{२} + (प^{२} − २ पफ − ६ फ^{२}) र^{३} ।

(१२) ७ तअ − ४ पय + ३ नर इस में २ थअ + ३ फय − ५ मर इस को घटा देओ ।

उत्तर, (७ त − २ थ) अ − (४ प + ३ फ) य + (३ न + ५ म) र ।

(१३) कय − घर^2 − छल^3 + १२ इस को अय − गर^2 + चल^3 + ७ इस में घटा देने से शेष क्या रहेगा?

उत्तर, (अ − क) य + (घ − ग) र^2 + (च + छ) ल^3 − ५।

(१४) ४ अय^3 − ५ चय^2 + ९ तय + ८ भ इस में ७ पय^3 + ८ फय^2 − ४ बय − भ इस को घटा देओ।

उत्तर, (४ अ − ७ प) य^3 − (५ च + ८ फ) य^2 + (९ त + ४ ब) य + ९ भ।

(१५) २ अकय^2 + ३ क^{2}यर − ४ अ^{2}र^2 इस को ५ अ^{2}य^2 − ७ अकयर + ९ क^{2}र^2 इस में घटा देओ।

उत्तर, (५ अ^2 − २ अक) य^2 − (७ अक + ३ क^2) यर + (४ अ^2 + ९ क^2) र^2।

(१६) (३ अ − ५ क) अय − (प − फ) यर^2 + (अ − ३) र^3 इस में (अ + २ क) अय + (२ प + फ) यर^2 + (अ − २ क) र^3 इस को घटा देओ।

उत्तर, (२ अ − ७ क) अय − ३ पयर^2 + (२ क − ३) र^3।

(१७) (अ − क) त^2 − (प + २ फ) तथ + फ^{2}थ^2 इस में (क + २ ग) त^2 + (३ प − फ) तथ + (फ^2 − ब^2) थ^2 इस को घटा के शेष कहो।

उत्तर, (अ − २ क − २ ग) त^2 − (४ प + फ) तथ + ब^{2}थ^2।

(१८) (प^2 − ३ पफ + फ^2) अय − (न^2 − २ नम − म^2) कर^2 इस में (प^2 − ४ पफ ४ फ^2) अय + (न^2 − नम + म^2) कर^2 इस को घटा देओ।

उत्तर, (पफ + ५ फ^2) अय − (२ न^2 − ३ नम) कर^2।

(१९) प − २ फ + ३ ब इस को (अ + १) प + (क − २) फ − (ग − ३) ब इस में घटा देने से शेष क्या रहेगा?

उत्तर, अप + कफ − गब।

(२०) (३ क^2 − ५ कग + ग^2) य^3 − (५ ग^2 − ७ घ^2) य^{2}र + (घ^2 + २ घच + ५ च^2) यर^2 − ८ च^{2}र^3 इस को (अ^2 + २ अक + ३ क^2) य^3

$+ (क^2 - ४कग + ग^2) य^2 र - (ग^2 - ५गघ + ३घ^2) य र^2 + (७घ^2 - ३च^2) र^3$
इस में घटा देखो ।

उत्तर, $(अ^2 + २अक + ५कग - ग^2) य^3 + (क^2 - ४कग + ६ग^2 - ७घ^2) य^2 र$
$- (ग^2 - ५गघ + ४घ^2 + २घच + ५च^2) य र^2 + (७घ^2 + ५च^2) र^3$ ।

---

३ गुणन ।

३० रीति । गुण्य के एक २ केवल पद को गुणक के एक २ केवल पद से गुण देने से जो अलग २ गुणनफल होंगे उन का योग करो यही अभीष्ट गुणनफल है* । अब यहां जो दो २ केवल पदों का गुणन करना पड़ता है उस में यदि उन केवल पद रूप गुण्य गुणकों के चिह्न सजातीय हों तो उन का गुणनफल धन होता है । और विजातीय हों तो ऋण होता है† । और गुण्य गुणकों के संख्यात्मक वारद्योतकों का गुणनफल उन के गुणनफल का संख्यात्मक वारद्योतक है । और गुण्य और गुणक इन में जो २ अक्षर होंगे वे ही सब गुणनफल में वर्णमाला के क्रम से लिखो ।

---

* इस की सत्यता इस भांति स्पष्ट होती है । सोचो की अ + क इस को ग + घ इस से गुणना है । तो इन का गुणनफल परिभाषा से (अ + क) (ग + घ) यों होगा ।

अब योगरीति से जाना जाता है कि (अ + क) (ग + घ) यह ग (अ + क) और घ (अ + क) इन का योग है और भी ग (अ + क) = अग + कग और
घ (अ + क) = अघ + कघ ।

∴ (अ + क) (ग + घ) = ग (अ + क) + घ (अ + क) = अग + कग + अघ + कघ इस में अ + क इस का एक एक केवल पद ग + घ इस के एक एक केवल पद से गुणा गया है । इस से उक्त रीति की सत्यता स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

† इस की उपपत्ति यह है । अ − क और ग − घ इन का गुणनफल
= (अ − क) (ग − घ) = ग (अ − क) − घ (अ − क) = (अग − कग) − (अघ − कघ)
= अग − कग − अघ + कघ इस में अ − क इस का
एक एक पद ग − घ इस के एक एक पद से अवश्य गुणा गया है ।

सो ऐसा (+ अ) × (+ ग) = + अग, (+ अ) × (− घ) = − अघ,
(− क) × (+ ग) = − कग और (− क) × (− घ) = + कघ । यह उपपन्न हुआ ।

और भी जो किसी एक पद का घात गुण्य में हो और उसी पद का घात गुणक में भी रहे तो उसी पद का घात गुणनफल में भी होगा। परंतु उस घात का घातमापक गुण्य गुणकों में जो घात हैं उन के घातमापकों के योग के समान होगा। इस की युक्ति सातवें प्रक्रम से प्रकाशित होती है।

जैसा, २अ$^{\text{३}}$य × ३अ$^{\text{२}}$य$^{\text{२}}$ = ६ अअअअअययय = ६ अ$^{\text{५}}$य$^{\text{३}}$ ।

अर्थात् २अ$^{\text{३}}$य × ३अ$^{\text{२}}$य$^{\text{२}}$ = ६ अ$^{\text{३+२}}$ × य$^{\text{१+२}}$ = ६ अ$^{\text{५}}$य$^{\text{३}}$ ।

उदा॰ (१) ५अ$^{\text{२}}$य इस को ३कय इस से गुण देओ।

न्यास। ५अ$^{\text{२}}$य गुण्य
३कय गुणक
१५अ$^{\text{२}}$कय$^{\text{२}}$ गुणनफल।

उदा॰ (२) −५अक इस को −अय इस से गुण देओ।

न्यास। −५अक गुण्य
−अय गुणक
५अ$^{\text{२}}$कय गुणनफल।

उदा॰ (३) ९यर इस को −२अल इस से गुण देओ।

न्यास। ९यर गुण्य
−२अल गुणक
−१८अयरल गुणनफल।

उदा॰ (४) ५अय + ४कर − ३गल इस को २अरल इस से गुण देओ।

न्यास। ५अय + ४कर − ३गल गुण्य
२अरल गुणक
१०अ$^{\text{२}}$यरल + ८अकर$^{\text{२}}$ल − ६अगरल$^{\text{२}}$, गुणनफल।

उदा॰ (५) अ$^{\text{२}}$ − ३अक इस को अ − २क इस से गुण देओ।

यहां बांई ओर से गुणने को आरम्भ करो और क्रम से गुणक के एक२ पद से गुण्य को गुणने से जो गुणनफल उत्पन्न होंगे उन में

पहिले गुणनफल के दूसरे केवल पद के नीचे से दूसरा गुणनफल लिखो फिर उस के भी दूसरे केवल पद के नीचे से तीसरा गुणनफल लिखो इसी भांति हर एक गुणनफल उस के पहिले गुणनफल के दूसरे केवल पद के नीचे से लिखो यों लिखने से प्रायः सजातीय पदों के नीचे सजातीय पद आते हैं उस से योग करने में बहुत श्रम नहीं होते ।

न्यास ।

$$\begin{array}{lll} & अ^{२} - ३\,अक & \\ & अ - २\,क & \\ \hline & अ^{३} - ३\,अ^{२}क & = (अ^{२} - ३\,अक) \times अ \\ & \quad - २\,अ^{२}क + ६\,अक^{२} & = (अ^{२} - ३\,अक) \times (-२\,क) \\ \hline & अ^{३} - ५\,अ^{२}क + ६\,अक^{२} & = (अ^{२} - ३\,अक) \times (अ - २\,क)\ । \end{array}$$

उदा० (६)

$$\begin{array}{l} य^{३} + य^{२}र + यर^{२} + र^{३} \\ य^{२} - यर + र^{२} \\ \hline य^{५} + य^{४}र + य^{३}र^{२} + य^{२}र^{३} \\ \quad - य^{४}र - य^{३}र^{२} - य^{२}र^{३} - यर^{४} \\ \qquad + य^{३}र^{२} + य^{२}र^{३} + यर^{४} + र^{५} \\ \hline य^{५} + य^{३}र^{२} + य^{२}र^{३} + र^{५} \end{array}$$

उदा० (७)

$$\begin{array}{l} अ + २\,क + ३\,ग \\ अ - २\,क + ५\,ग \\ \hline अ^{२} + २\,अक + ३\,अग \\ \quad - २\,अक - ४\,क^{२} - ६\,कग \\ \qquad + ५\,अग + १०\,कग + १५\,ग^{२} \\ \hline अ^{२} - ४\,क^{२} + ८\,अग + ४\,कग + १५\,ग^{२} \end{array}$$

उदा० (८)

$$\begin{array}{l} अय^{२} + गय - च \\ कय^{२} - घय - छ \\ \hline अकय^{४} + कगय^{३} - कचय^{२} \\ \quad - अघय^{३} - गघय^{२} + घचय \\ \qquad - अछय^{२} - गछय + चछ \\ \hline अकय^{४} + (कग - अघ)\,य^{३} - (कच + गघ + अछ)\,य^{२} + (घच - गछ)\,य + चछ \end{array}$$

उदा० (९) $अ^{२} + अ + १$

$अ^{२} - अ + १$

$अ^{४} + अ^{३} + अ^{२}$

$- अ^{३} - अ^{२} - अ$

$अ^{२} + अ + १$

$अ^{४} + अ^{२} + १$

उदा० (१०) $अ^{४} + अ^{२} + १$

$अ^{२} - १$

$अ^{६} + अ^{४} + अ^{२}$

$- अ^{४} - अ^{२} - १$

$अ^{६} - १$

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $३ अय^{२}र$, $५ अ^{२}क^{३}य$ इन का $५ य^{२}र^{३}$, $-४ अयर$ इन का और $-७ अक^{२}ल^{३}$, $-४ अकग$ इन का अलग २ गुणनफल कहो ?

उत्तर, $१५ अ^{३}क^{३}य^{३}र$, $-२० अय^{३}र^{४}$ और $२८ अ^{२}क^{३}गल^{३}$ ।

(२) $७ य^{३}र^{२}ल$ इस को $४ यर^{२}ल^{३}$ इस से और $-८ अय^{३}र$ इस को $३ कयर^{२}$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $२८ य^{४}र^{४}ल^{४}$ और $-२४ अकय^{४}र^{३}$ ।

(३) $६ (अ + य)^{२}$ इस को $-२ (अ + य)$ इस से और $-५ अ^{२} (य - र)^{५}$ इस को $-३ अ (य - र)^{२}$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $-१२ (अ + य)^{३}$ और $१५ अ^{३} (य - र)^{७}$ ।

(४) $३ अ + ५ र$, $७ क$ इन का $५ य - ७ र$, $-४ र$ इन का और $-३ य^{२}र - ६ यर^{२}$, $-यरल$ इन का गुणनफल क्या होगा ?

उत्तर, $२१ अक + ३५ कर$, $-२० यर + २८ र^{२}$ और $३ य^{३}र^{२}ल + ६ य^{२}र^{३}ल$ ।

(५) $४ अय^{२} - ५ कय + ७ ग$ इस को $६ अय$ इस से और $५ य^{३}र^{२} - ७ य^{२}र - ४ य$ इस को $- ८ अयर$ इस से गुणा देओ ।

उत्तर, $२४ अ^{२}य^{३} - ३० अकय^{२} + ४२ अगय$ और $- ४० अय^{४}र^{३} + ५६ अय^{३}र^{२} + ३२ अय^{२}र$ ।

(६) $५ अ + ७ क$, $३ अ + ४ क$ इन का और $३ य^{२} - ७ रल$, $९ य^{२} + ६ रल$ इन का गुणनफल क्या होगा?

उत्तर, $१५ अ^{२} + ४१ अक + २८ क^{२}$ और $२७ य^{४} - ४५ य^{२}रल - ४२ र^{२}ल^{२}$ ।

(७) $४ अय + ५ क^{२}$, $४ अय - ५ क^{२}$ इन का और $अ^{२} + अक + क^{२}$, $अ^{२} - अक + क^{२}$ इन का गुणनफल क्या होगा ?

उत्तर, $१६ अ^{२}य^{२} - २५ क^{४}$ और $अ^{४} + अ^{२}क^{२} + क^{४}$ ।

(८) $३ य^{२} - ५ यर + २ र^{२}$ इस को $२ य - ७ र$ इस से और $५ अ^{२} + ३ अक - क^{२}$ इस को $२ अ^{२} - ४ अक + ९ क^{२}$ इस से गुणा देओ ।

उत्तर, $६ य^{३} - ३१ य^{२}र + ३९ यर^{२} - १४ र^{३}$ और $१० अ^{४} - १४ अ^{३}क + ३१ अ^{२}क^{२} + ३१ अक^{३} - ९ क^{४}$ ।

(९) $अ^{२} + ३ अक + क^{२}$ इस को $अ^{२} - ३ अक + क^{२}$ इस से और $य^{२} + २ यर + ३ र^{२}$ इस को $य^{२} - २ यर + र^{२}$ इस से गुणा देओ ।

उत्तर, $अ^{४} - ७ अ^{२}क^{२} + क^{४}$ और $य^{४} - ४ यर^{३} + ३ र^{४}$ ।

(१०) $य^{३} - २ य^{२}र + ४ यर^{२} - ३ र^{३}$ इस को $य + २ र$ इस से और $अ^{४} - ३ अ^{३}क + २७ अक^{३} - ८१ क^{४}$ इस को $अ^{२} + ३ अक + ९ क^{२}$ इस से गुणा देओ ।

उत्तर, $य^{४} + ५ यर^{३} - ६ र^{४}$ और $अ^{६} - ७२९ क^{६}$ ।

(११) $य^{३} + २ य^{२}र + ४ यर^{२} + ८ र^{३}$ इस को $य - २ र$ इस से और $अ^{४} - ३ अ^{३} + ९ अ^{२} - २७ अ + ८१$ इस को $अ + ३$ इस से गुणा देओ ।

उत्तर, $य^{४} - १६ र^{४}$ और $अ^{५} + २४३$ ।

(१२) $य^{५} + य^{४} + य^{३} + य^{२} + य + १$ इस को $य^{३} - य^{२} - य + १$ इस से और $अ^{४} + ६ अ^{३}क + ९ अ^{२}क^{२}$ इस को $अ^{४} - ६ अ^{३}क + ९ अ^{२}क^{२}$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $य^{८} - य^{६} - य^{२} + १$ और $अ^{८} - १८ अ^{६}क^{२} + ८१ अ^{४}क^{४}$ ।

(१३) $अ^{३} + ६ अ^{२} + १८ अ + १$ इस को $अ^{३} - ६ अ^{२} + १८ अ - १$ इस से और $य^{४} + ३ य^{३} + ४ य^{२} + ३ य + १$ इस को $य^{४} - ३ य^{३} + ४ य^{२} - ३ य + १$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $अ^{६} + ३१२ अ^{२} - १$ और $य^{८} - य^{६} - य^{२} + १$ ।

(१४) $य^{५} + ५ य^{४}र + १० य^{३}र^{२} + १० य^{२}र^{३} + ५ यर^{४} + र^{५}$ इस को $य^{३} - ३ य^{२}र + ३ यर^{२} - र^{३}$ इस से गुण देने से गुणनफल क्या होगा ?

उत्तर, $य^{८} + २ य^{७}र - २ य^{६}र^{२} - ६ य^{५}र^{३} + ६ य^{३}र^{५} + २ य^{२}र^{६} - २ यर^{७} - र^{८}$ ।

(१५) $य^{४} + ४ य^{३} + ८ य^{२} + ४ य + १$ इस को $य^{४} - ४ य^{३} + ८ य^{२} - ४ य + १$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $य^{८} + ३४ य^{४} + १$ ।

(१६) $१ + ४ य + ९ य^{२} + १६ य^{३} + २५ य^{४}$ इस को $१ - ३ य + ३ य^{२} - य^{३}$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $१ + य - ३६ य^{५} + ५९ य^{६} - २५ य^{७}$ ।

(१७) $अ^{४} + ३ अ^{३}क + ६ अ^{२}क^{२} + १० अक^{३} + १५ क^{४}$ इस को $अ^{३} - ३ अ^{२}क + ३ अक^{२} - क^{३}$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $अ^{७} - २१ अ^{२}क^{५} + ३५ अक^{६} - १५ क^{७}$ ।

(१८) $य^{५} + २ अय^{४} + २ अ^{२}य^{३} + २ अ^{३}य^{२} + २ अ^{४}य + अ^{५}$ इस को $य^{५} - २ अय^{४} + २ अ^{२}य^{३} - २ अ^{३}य^{२} + २ अ^{४}य - अ^{५}$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $य^{१०} - अ^{१०}$ ।

(१९) अ^{२} + २ अक + २ अग + क^{२} + २ कग + ग^{२} और अ^{२} − २ अक − २ अग + क^{२} + २ कग + ग^{२} इन का गुणनफल क्या होगा?

उत्तर, अ^{४} − २ अ^{२}क^{२} − ४ अ^{२}कग − २ अ^{२}ग^{२} + क^{४} + ४ क^{३}ग + ६ क^{२}ग^{२} + ४ कग^{३} + ग^{४} ।

(२०) य^{२} + ४ यर + ६ यल + ८ र^{२} + १७ रल + १८ ल^{२} इस को य^{२} − ४ यर − ६ यल + ८ र^{२} − १७ रल + १८ ल^{२} इस से गुण देओ।

उत्तर, य^{४} − ४८ य^{२}रल − १३६ यर^{२}ल − २०४ यरल^{२} + ६४ र^{४} − र^{२}ल^{२} + ३२४ ल^{४} ।

(२१) य + ३ अर इस को २ य + ५ कर इस से और य^{२} + २ अय + ३ क इस को य − ५ ग इस से गुण देओ।

उत्तर, २ य^{२} + (६ अ + ५ क) यर + १५ अकर^{२} और य^{३} + (२ अ − ५ ग) य^{२} − (१० अग − ३ क) य − १५ कग।

(२२) य^{३} + तय^{२} + थय + द इस को य^{२} − धय − न इस से गुण देओ।

उत्तर, य^{५} + (त − ध) य^{४} − (तध − थ + न) य^{३} − (तन + थध − द) य^{२} − (थन + दध) य − दन।

(२३) य^{४} + तय^{३} + (त − १) य^{२} + (त − २) य + त − ३ इस को य − त इस से गुण देओ।

उत्तर, य^{५} − (त^{२} − त + १) य^{३} − (त^{२} − २ त + २) य^{२} − (त^{२} − ३ त + ३) य − त^{२} + ३ त।

(२४) अ + (अ + $\frac{१}{२}$) य + (अ + १) य^{२} + (अ + $\frac{३}{२}$) य^{३} + (अ + २) य^{४} + (अ + $\frac{५}{२}$) य^{५} इस को १ − २ य + य^{२} इस से गुण देओ।

उत्तर, अ − (अ − $\frac{१}{२}$) य − (अ + ३) य^{६} + (अ + $\frac{५}{२}$) य^{७} ।

(२५) य^{४} + (अ + १) य^{३}र + (२ अ + १) य^{२}र^{२} + (३ अ + १) यर^{३} + (४ अ + १) र^{४} इस को य^{२} − २ यर + र^{२} इस से गुण देओ।

उत्तर, य^{६} + (अ − १) य^{५}र − (५ अ + १) यर^{५} + (४ अ + १) र^{६} ।

(२६) $तय^{३} - (२त + थ) य^{२}र + (३त + ३थ) यर^{२} - (४त + ६थ) र^{३}$ इस को $य^{३} + ३य^{२}र + ३यर^{२} + र^{३}$ इस से गुण देओ ।

उत्तर, $तय^{६} + (त - थ) य^{५}र - (५त + १०थ) य^{२}र^{४} - (९त + १५थ) यर^{५} - (४त + ६थ) र^{६}$ ।

(२७) $य + १$, $य - २$ और $य + ३$ इन का गुणनफल क्या होगा ?

उत्तर, $य^{३} + २य^{२} - ५य - ६$ ।

(२८) $अ + ३क$, $अ + क$, $अ - क$ और $अ - ३क$, इन का गुणनफल क्या होगा ?

उत्तर, $अ^{४} - १०अ^{२}क^{२} + ९क^{४}$ ।

(२९) $य + र$, $य - र$ और $य^{२} + र^{२}$ इन का गुणनफल क्या होगा ?

उत्तर, $य^{४} - र^{४}$ ।

(३०) $अ + क$, $ग + घ$, और $च + छ$ इन का गुणनफल क्या होगा ?

उत्तर, $अगच + कगच + अघच + कघच + अगछ + कगछ + अघछ + कघछ$ ।

(३१) $अ + क$, $अ + ग$ और $अ + घ$ इन का गुणनफल क्या है ?

उत्तर, $अ^{३} + (क + ग + घ) अ^{२} + (कग + कघ + गघ) अ + कगघ$ ।

(३२) $य - अ$, $य - क$, $य - ग$ और $य - घ$ इन का गुणनफल कहो ।

उत्तर, $य^{४} - (अ + क + ग + घ) य^{३}$
$+ (अक + अग + अघ + कग + कघ + गघ) य^{२}$
$- (अकग + अकघ + अगघ + कगघ) य + अकगघ$ ।

(३३) $अ - क$, $अ - ग$ और $क - ग$ इन का गुणनफल कहो ।

उत्तर, $अ^{२}क - अ^{२}ग - अक^{२} + अग^{२} + क^{२}ग - कग^{२}$ ।

(३४) यह सिद्ध करो कि

$अ (क - ग) - क (अ - ग) + ग (अ - क) = ०$ ।

(३५) यह सिद्ध करो कि

$(अ^2 + क^2)(अ - क) + (अ^2 - क^2)(अ + क) + २क^3 = २अ^3$ ।

(३६) $(य + अ)(य + क) - (य + अ)(य - क) + (य - अ)(य + क)$
$-(य - अ)(य - क) = ४कय$ इस को सिद्ध करना चाहिये ।

(३७) यह सिद्ध करो कि

$अ^2(क - ग) - क^2(अ - ग) + ग^2(अ - क) = (अ - क)(अ - ग)(क - ग)$ ।

(३८) यह सिद्ध करो कि

$(अ - क)(अ + ग)(क + ग) - (अ - ग)(अ + क)(क + ग)$
$+ (क - ग)(अ + क)(अ + ग) = (अ - क)(अ - ग)(क - ग)$ ।

(३९) यह सिद्ध करो कि

$(अ - क)(य + अ + ग)(य + क + ग) - (अ - ग)(य + अ + क)(य + क + ग)$
$+ (क - ग)(य + अ + क)(य + अ + ग) = (अ - क)(अ - ग)(क - ग)$ ।

(४०) यह सिद्ध करो कि

$अ^2(क - ग)(य + क)(य + ग) - क^2(अ - ग)(य + अ)(य + ग)$
$+ ग^2(अ - क)(य + अ)(य + क) = य^2(अ - क)(अ - ग)(क - ग)$ ।

---

४ भागहार ।

३१ । भाज्य और भाजक इन के केवलपदत्व और संयुक्तपदत्व से भागहार के अनेक प्रकार होते हैं ।

पहिला प्रकार । जब भाज्य और भाजक दोनों केवलपद हैं ।

(१) रीति । भिन्नाङ्करीति से भाज्य भाजकों को लिखो और संभव हो तो उन के अङ्कात्मक वारद्योतकों में अपवर्त करो फिर यदि किसी अक्षर का कोई घात भाज्य में रहे और वही घात भाजक में भी रहे तो उस को दोनों में से छेंक देओ और जो किसी एक अक्षर का घात भाज्य

में हो और उस से भिन्न उसी अक्षर का घात भाजक में भी हो तो उन दोनो घातों को छेंक के अधिक घात जिस स्थान में होगा वहां उसी अक्षर का वह घात लिख देओ जिस का घातमापक उन छेंके हुए दो घातों के घातमापकों के अन्तर के समान हो*।

भाज्य भाजकों के चिह्न सजातीय हों तो भजनफल धन होता है और विजातीय हों तो ऋण होता है†।

उदा० (१) १२य^{२}र^{३}स इस में ३य^{२}र इस का भाग देओ।

$$\text{न्यास।}\quad \frac{\text{१२य}^{२}\text{र}^{३}\text{स}}{\text{३य}^{२}\text{र}} = \text{४र}^{२}\text{स।}$$

उदा० (२) −१५अ^{३}क इस में −९अक^२ इस का और २० अ^{२}कग इस में −५क इस का भाग देओ।

$$\text{न्यास।}\quad \frac{-\text{१५अ}^{३}\text{क}}{-\text{९ अक}^{२}} = \frac{\text{५ अ}^{२}}{\text{३ क}}\ \text{और}\ \frac{\text{२० अ}^{२}\text{कग}}{-\text{५ क}} = -\text{४ अ}^{२}\text{ग।}$$

दूसरा प्रकार। जब भाज्य संयुक्तपद और भाजक केवलपद है।

(२) रीति। पहिले प्रकार से भाज्य के प्रत्येक केवलपदों में भाजक का भाग देओ।

उदा० (१) १२ अ^{२}क − १८ अक^{२}ग^२ − १६ अ^{३}क^३ इस में ६ अक इस का भाग देओ।

---

* इस में जो भजनफल जानने के लिये रीति कही है यह सब भाज्य भाजकों में अपवर्त करने का प्रकार है। और भाज्य भाजकों में अपवर्त करने से भजनफल में अन्तर नहीं पड़ता इस की युक्ति सातवीं प्रतक्ष बात से तुरन्त मन में बैठेगी।

† इस की युक्ति यह है $\because$ (+ अ) × (+ क) = + अक $\therefore \frac{+\text{अक}}{+\text{क}} = +\text{क}$

$\because$ (−अ) × (+ क) = − अक $\therefore \frac{-\text{अक}}{-\text{अ}} = +\text{क}$, और $\frac{-\text{अक}}{+\text{क}} = -\text{अ}$

और $\because$ (− अ) × (− क) = + अक $\therefore \frac{+\text{अक}}{-\text{अ}} = -\text{क}$ यह उपपन्न हुआ।

न्यास । $\frac{१२ अ^{२}क - १८ अक^{२}ग^{३} - १६ अ^{३}क^{३}}{६ अक} = २ अ - ३ कग^{३}$ $- \frac{८}{३} अ^{२}क^{२}$ ।

तीसरा प्रकार । जब भाज्य और भाजक दोनो संयुक्त पद वा केवल भाजक ही संयुक्त पद है ।

(३) रीति । यहां भाज्य भाजकों को व्यक्त गणित की रीति से इस भांति लिखो कि उन दोनों में किसी एक गुणरूप अक्षर के घातों के घातमापक उत्तरोत्तर घटते हुए वा बढ़ते हुए रहें । यों लिखने से भाज्य भाजकों में जिन गुणरूप अक्षरों के घातों के घातमापक उत्तरोत्तर घटते हुए वा बढ़ते हुए होंगे उन अक्षरों को मुख्य अक्षर कहो । अब भाजक के पहिले केवलपद का भाज्य के पहिले केवलपद में भाग देने से जो फल आने के योग्य हो उस को भजनफल के स्थानपर लिख के उस से समग्र भाजक को गुण के उस गुणनफल को भाज्य में घटा देओ फिर जो शेष बचे उस को भाज्य मान के फिर पूर्ववत् विधि करो । ऐसा वारंवार तब तक करो जब तक शेष कुछ न बचे वा जब तक भाजक के पहिले पद का भाज्य के पहिले पद में भाग देने से जो फल आने के योग्य हो उस के छेद स्थान में कोइ मुख्य अक्षर आवे ।

भाजक का भाज्य में भाग देने से जो शेष कुछ न रहे तो भजनफल के स्थानपर जितने पद आए होंगे वह पूरा भजनफल है । और जो कुछ शेष रहा हो तो उस को और भाजक को क्रम से अंश और छेद समझ के उन से जो एक भिन्न पद बनेगा उस को भजनफल के स्थान पर जो पद हैं उन के पीछे लिख देओ यों करने से भजनफल के स्थान पर जो बनेगा सो पूरा भजनफल है ।

उदा० (१) $६ अ^{२} + १९ अक + १५ क^{२}$ इस में $३ अ + ५ क$ इस का भाग देओ ।

न्यास। $३अ+५क\ )\ ६अ^{२}+१९अक+१५क^{२}\ (\ २अ+३क$

$६अ^{२}+१०अक$

$९अक+१५क^{२}$

$९अक+१५क^{२}$

. .

उदा० (२) $अ^{४}+५५अक^{३}+१२६क^{४}$ इस में $अ^{२}+५अक+७क^{२}$ इस का भाग देओ।

न्यास। $अ^{२}+५अक+७क^{२}\ )\ अ^{४}+५५अक^{३}+१२६क^{४}\ (\ अ^{२}-५अक+१८क^{२}$

$अ^{४}+५अ^{३}क+७अ^{२}क^{२}$

$-५अ^{३}क-७अ^{२}क^{२}+५५अक^{३}$

$-५अ^{३}क-२५अ^{२}क^{२}-३५अक^{३}$

$१८अ^{२}क^{२}+९०अक^{३}+१२६क^{४}$

$१८अ^{२}क^{२}+९०अक^{३}+१२६क^{४}$

. . .

उदा० (३) $अ^{३}+३य^{३}$ इस में $अ+य$ इस का भाग देओ।

न्यास। $अ+य\ )\ अ^{३}+३य^{३}\ (\ अ^{२}-अय+य^{२}+\frac{२य^{३}}{अ+य}$।

$अ^{३}+अ^{२}य$

$-अ^{२}य+३य^{३}$

$-अ^{२}य-अय^{२}$

$अय^{२}+३य^{३}$

$अय^{२}+य^{३}$

$२य^{३}$

उदा० (४) $य^{३}+तय^{२}+दय+न$ इस में $य-अ$ इस का भाग देओ।

न्यास। $य - अ) य^3 + तय^2 + दय + न \left(य^2 + (अ + त) य + (अ^2 + अत + द) + \frac{अ^3 + तअ^2 + दअ + न}{य - अ} \right.$ ।

$$य^3 - अय^2$$

$$(अ + त) य^2 + दय$$

$$(अ + त) य^2 - (अ^2 + तअ) य$$

$$(अ^2 + तअ + द) य + न$$

$$(अ^2 + तअ + द) य - (अ^3 + अ^2त + दअ)$$

$$अ^3 + तअ^2 + दअ + न ।$$

यहां भाज्य और शेष एकरूप हैं किन्तु भाज्य में जहां य अक्षर है तहां शेष में अ अक्षर इतना हि विशेष है ।

उदा० (५) $य^3 - य^2र \quad ६ अय^2 - १० यर^2 + ३२ अयर - १२ अ^2य - ८ र^3 - २ अर^2 + २१ अ^2र - ५ अ^3$ इस में $य - ४ र + अ$ इस का भाग देओ ।

न्यास ।

भाजक $य - ४ र + अ)$ भाज्य $(लब्धि\ य^2 + ३ यर - ७ अय + २ र^2 + अर - ५ अ^2$

$$य^3 - य^2र - ६ अय^2 - १० यर^2 + ३२ अयर - १२ अ^2य - ८ र^3 - २ अर^2 + २१ अ^2र - ५ अ^3$$

$$य^3 - ४य^2र + अय^2$$

$$+ ३ य^2र - ७ अय^2 - १० यर^2 + ३२ अयर$$

$$+ ३ य^2र \quad - १२ यर^2 + ३ अयर$$

$$- ७ अय^2 + २ यर^2 + २९ अयर - १२ अ^2य$$

$$- ७ अय^2 \quad + २८ अयर - ७ अ^2य$$

$$+ २ यर^2 + अयर - ५ अ^2य - ८ र^3 - २ अर^2$$

$$+ २ यर^2 \quad - ८ र^3 + २ अर^2$$

$$+ अयर - ५ अ^2य \quad - ४ अर^2 + २१ अ^2र$$

$$+ अयर \quad - ४ अर^2 + अ^2र$$

$$- ५ अ^2य \quad + २० अ^2र - ५ अ^3$$

$$- ५ अ^2य \quad + २० अ^2र - ५ अ^3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

अथवा जैसे इस उदाहरण में तीन अक्षर हैं ऐसे जहां भाज्य और भाजक में तीन वा चार अक्षर हों वहां उन अक्षरों में किसी एक अक्षर

को मुख्य मान के भाज्य और भाजक में जो उस मुख्य अक्षर के और उस के घातों के अनेक सजातीय पद होंगे उन को (२७) वा (२८) वे प्रक्रम के अनुसार इकट्ठा करके लिखो । तब वैसे भाज्य में वैसे भाजक का भागहार के इसी तीसरे प्रकार के अनुसार भाग देओ ।

जैसा । इसी उदाहरण में उक्तरीति से भाज्य और भाजक को बना के

न्यास ।

भाजक $य - (४ र - अ)$) भाज्य (लब्धि $य^{२} + (३ र - ७ अ) य + (२ र^{२} + अर - ५ अ^{२})$

$य^{३} - (र + ६ अ) य^{२} - (१० र^{२} - ३२ अर + १२ अ^{२}) य - (८ र^{३} + २ अर^{२} - २१ अ^{२}र + ५ अ^{३})$

$\underline{य^{३} - (४र - अ) य^{२}}$

$+ (३र - ७ अ) य^{२} - (१० र^{२} - ३२ अर + १२ अ^{२}) य$

$\underline{+ (३र - ७ अ) य^{२} - (१२ र^{२} - ३१ अर + ७ अ^{२}) य}$

$+ (२ र^{२} + अर - ५ अ^{२}) य - (८ र^{३} + २ अर^{२} - २१ अ^{२}र + ५ अ^{३})$

$\underline{+ (२ र^{२} + अर - ५ अ^{२}) य - (८ र^{३} + २ अर^{२} - २१ अ^{२}र + ५ अ^{३})}$

इस प्रकार से यहां लब्धि $य^{२} + (३ र - ७ अ) य + (२ र^{२} + अर - ५ अ^{२})$ यह आई है इस में कोष्ठ को मिटा देने से $य^{२} + ३ यर - ७ अय + २ र^{२} + अर - ५ अ^{२}$ यही अभीष्ट लब्धि है ।

उदा० (६) १ इस में १ - य इस का भाग देओ ।

न्यास । $१ - य$) १ ($१ + य + य^{२} + य^{३} +$ इत्यादि ।

$\underline{१ - य}$

$य$

$\underline{य - य^{२}}$

$य^{२}$

$\underline{य^{२} - य^{३}}$

$य^{३}$

$\underline{य^{३} - य^{४}}$

$य^{४}$ इत्यादि ।

यहां य का घात शेष रहता जाता है और वह शेष जैाथा होगा वहाँ संख्या वहां य के घात के घातमापक की रहती है। और यहां भजनफल के स्थान पर अनन्त केवलपद आते हैं। इस लिये यहां भागहार को चाहे तब तक बढाते हैं और भी यहां के भजनफल को अनन्त श्रेढी कहते हैं और उस को

$\frac{१}{१-य} = १ + य + य^{२} + य^{३} + \cdots\cdots$ यों लिखते हैं।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $१५ अ^{२}क^{३}ग^{३}$ इस में $३ अक$ इस का और $-७ य^{४}र^{२} + १४ य^{३}र^{३} - २१ य^{२}र^{४}$ इस में $-७ यर^{२}$ इस का भाग देओ।

उत्तर, $५ अक^{२}ग^{३}$ और $य^{३} - २ य^{२}र + ३ यर^{२}$।

(२) $१० य^{३}र$ इस में $-२ य^{२}र^{३}$ इस का और $-२८ अ^{३}य^{४}$ इस में $-७ अ^{२}य$ इस का भाग देओ।

उत्तर, $-५ यर^{४}$ और $४ अय^{३}$।

(३) $१५ (अ + क)^{७} य^{७}$ इस में $५ (अ + क)^{२} य^{३}$ इस का और $-५ अ^{२}क (य - र)^{४}$ इस में $-५ क (य - र)$ इस का भाग देओ।

उत्तर, $३ (अ + क)^{५} य^{४}$ और $अ^{२} (य - र)^{३}$।

(४) $३५ अ^{३}क^{२} - २१ अ^{२}क^{३} + १४ अक^{४}$ इस में $७ अक^{२}$ इस का और $-३२ य^{५}र^{३} + २० य^{४}र^{४} - १६ य^{३}र^{५} + २८ य^{२}र^{६}$ इस में $-४ य^{२}र^{३}$ इस का भाग देओ।

उत्तर, $५ अ^{२} - ३ अक + २ क^{२}$ और $८ य^{३} - ५ य^{२}र + ४ यर^{२} - ७ र^{३}$।

(५) $६ अ^{२} - अक - ३५ क^{२}$ इस में $३ अ + ७ क$ इस का और $५६ य^{२} - ९५ अय + ३६ अ^{२}$ इस में $७ य - ४ अ$ इस का भाग देओ।

उत्तर, $२ अ - ५ क$ और $८ य - ९ अ$।

(६) $१२ य^{२} + २३ यर + ५ र^{२}$ इस में $४ य + र$ इस का और $१५ य^{४} - २३ य^{३}र - २८ य^{२}र^{२}$ इस में $३ य^{२} - ७ यर$ इस का भाग देओ।

उत्तर, $३ य + ५ र$ और $५ य^{२} + ४ यर$।

(७) $अ^{२} - क^{२}$ इस में $अ - क$ इस का और $य^{३} + र^{३}$ इस में $य + र$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $अ + क$ और $य^{२} - यर + र^{२}$ ।

(८) $२० अ^{३} + १३ अ^{२}क - २९ अक^{२} + ६ क^{३}$ इस में $४ अ - ३ क$ इस का और $२४ य^{३} + २५ य^{२}र + २ यर^{२} + ४५ र^{३}$ इस में $३ य + ५ र$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $५ अ^{२} + ७ अक - २ क^{२}$ और $८ य^{२} - ५ यर + ९ र^{२}$ ।

(९) $य^{४} - र^{४}$ इस में $य - र$ इस का और $य^{४} - १९ य^{२} + ९$ इस में $य^{२} + ५ य + ३$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $य^{३} + य^{२}र + यर^{२} + र^{३}$ और $य^{२} - ५ य + ३$ ।

(१०) $य^{५} - ३ य^{४} + य^{३} + ५ य^{२} - २० य + २८$ इस में $य^{२} - ४$ इस का और $य^{४} + ९ य^{२} + ८१$ इस में $य^{२} - ३ य + ९$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $य^{३} - ३ य^{२} + ५ य - ७$ और $य^{२} + ३ य + ९$ ।

(११) $३० अ^{४} + २ अ^{३}य - ३१ अ^{२}य^{२} + १९ अय^{३} - ५ य^{४}$ इस में $५ अ^{२} - ३ अय + य^{२}$ इस का और $६ य^{४} + ३९ य^{३}र + ९२ य^{२}र^{२} + १०० यर^{३} + १३ र^{४}$ इस में $३ य^{२} + ९ यर + १३ र^{२}$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $६ अ^{२} + ४ अय - ५ य^{२}$ और $२ य^{२} + ७ यर + र^{२}$ ।

(१२) $अ^{४} + ६४ क^{४}$ इस में $अ^{२} + ४ अक + ८ क^{२}$ इस का और $८१ य^{४} + ४ अ^{४}$ इस में $९ य^{२} - ६ अय + २ अ^{२}$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $अ^{२} - ४ अक + ८ क^{२}$ और $९ य^{२} + ६ अय + २ अ^{२}$ ।

(१३) $६ य^{४} - २ य^{३} - ३१ य^{२} + ३३ य - ७$ इस में $३ य^{२} + ५ य - ७$ इस का और $३ य^{४} - ११ य^{३}र + ३३ यर^{३} - ७ र^{४}$ इस में $य^{२} - ५ यर + ७ र^{२}$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $२ य^{२} - ४ य + १$ और $३ य^{२} + ४ यर - र^{२}$ ।

(१४) $अ^{८} + अ^{६} + अ^{४} + अ^{२} + १$ इस में $अ^{४} + अ^{३} + अ^{२} + अ + १$ इस का और $य^{६} - र^{६}$ इस में $य^{२} - र^{२}$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $अ^{४} - अ^{३} + अ^{२} - अ + १$ और $य^{४} + य^{२}र^{२} + र^{४}$

(१५) $अ^६ - ३ अ^४ क^२ + ३ अ^२ क^४ - क^६$ इस में $अ^३ + ३ अ^२ क + ३ अ क^२ + क^३$ इस का और $१५ य^७ + ३५ य^६ + २१ य^५ + १$ इस में $य^३ + ३ य^२ + ३ य + १$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $अ^३ - ३ अ^२ क + ३ अ क^२ - क^३$, और $१५ य^४ - १० य^३ + ६ य^२ - ३ य + १$ ।

(१६) $१६ य^५ + १६ य^४ र - ५८ य^३ र^२ + ३९ य^२ र^३ - ४१ य र^४ + १४ र^५$ इस में $२ य^२ + ३ य र - ७ र^२$ इस का और $य^५ - १९ य^३ र^२ - १९ य^२ र^३ + र^५$ इस में $य^२ - ५ य र + र^२$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $८ य^३ - ४ य^२ र + ५ य र^२ - २ र^३$ और $य^३ + ५ य^२ र + ५ य र^२ + र^३$ ।

(१७) $५५ य^६ - १४४ य^५ + १$ इस में $य^२ - ३ य + १$ इस का और $३० य^७ - १३ य^६ + १$ इस में $३ य^२ + २ य + १$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $५५ य^४ + २१ य^३ + ८ य^२ + ३ य + १$ और $१० य^५ - ११ य^४ + ४ य^३ + य^२ - २ य + १$ ।

(१८) $य^३ - ५ य^२ + ३ य + २$ इस से किस को गुण देवें तो गुणनफल $४७५ य^७ - २५५७ य^६ + २४११ य^५ + ३२$ यह होगा ?

उत्तर, $४७५ य^४ - १८२ य^३ + ७६ य^२ - २४ य + १६$ ।

(१९) $९ य^{१०} + ८ य^८ र^२ - ८ य^२ र^८ - ९ र^{१०}$ इस में $३ य^५ - ८ य^४ र + १२ य^३ र^२ - १२ य^२ र^३ + ८ य र^४ - ३ र^५$ इस का भाग देओ ।

उत्तर, $३ य^५ + ८ य^४ र + १२ य^३ र^२ + १२ य^२ र^३ + ८ य र^४ + ३ र^५$ ।

(२०) जिन गुण्य गुणकों का गुणनफल $१६ अ^{१०} + १५ अ^८ य^२ - १५ अ^२ य^८ - १६ य^{१०}$ यह है उन में जो गुणक $४ अ^५ - अ^४ य + २ अ^३ य^२ + २ अ^२ य^३ - अ य^४ + ४ य^५$ यह हो तो गुण्य क्या होगा ?

उत्तर, $४ अ^५ + अ^४ य + २ अ^३ य^२ - २ अ^२ य^३ - अ य^४ - ४ य^५$ ।

(२१) १ − २२० अ^{९} + ५९४ अ^{१०} − ५४० अ^{११} + १६५ अ^{१२} इस में १ − ४ अ + ६ अ^{२} − ४ अ^{३} + अ^{४} इस का भाग देओ ।

उत्तर, १ + ४ अ + १० अ^{२} + २० अ^{३} + ३५ अ^{४} + ५६ अ^{५} + ८४ अ^{६} + १२० अ^{७} + १६५ अ^{८} ।

(२२) अ^{३} + अ^{२}क − अक^{२} − क^{३} + अ^{२}ग + २ अकग + क^{२}ग − अग^{२} + कग^{२} − ग^{३} इस में अ − क + ग इस का भाग देओ ।

उत्तर, अ^{२} + २ अक + क^{२} − ग^{२} ।

(२३) य^{३} − ८ र^{३} + २७ ल^{३} + १८ यरल इस में य − २ र + ३ ल इस का भाग देओ ।

उत्तर, य^{२} + २ यर − ३ यल + ४ र^{२} + ६ रल + ९ ल^{२} ।

(२४) अ^{३} − ८ क^{३} − ४९० ग^{३} + १७ अ^{२}ग + १६ क^{२}ग + १८२ कग^{२} इस में अ − २ क + ७ ग इस का भाग देओ ।

उत्तर, अ^{२} + २ अक + १० अग + ४ क^{२} + ६ कग − ७० ग^{२} ।

(२५) य^{३} + ६ य^{२}र + १२ यर^{२} + ८ र^{३} − १ इस में किस का भाग देने से लब्धि य + २ र − १ यह आवेगी?

उत्तर, य^{२} + ४ यर + ४ र^{२} + य + २ र + १ ।

(२६) १६ य^{४} − ८१ र^{४} + १०८ र^{३}ल − ५४ र^{२}ल^{२} + १२ रल^{३} − ल^{४} इस में २ य − ३ र + ल इस का भाग देओ ।

उत्तर, ८ य^{३} + १२ य^{२}र − ४ य^{२}ल + १८ यर^{२} − १२ यरल + २ यल^{२} + २७ र^{३} − २७ र^{२}ल + ९ रल^{२} − ल^{३} ।

(२७) अ^{३} + ३ अ^{२}क + ३ अ^{२}ग + ३ अक^{२} + ६ अकग + ३ अग^{२} + क^{३} + ३ क^{२}ग + ३ कग^{२} + ग^{३} + १ इस में अ + क + ग + १ इस का भाग देओ ।

उत्तर, अ^{२} + २ अक + २ अग + क^{२} + २ कग + ग^{२} − अ − क − ग + १ ।

(२८) य^{३} + (५ अ + ४ त) य^{२} + (२० अत + ७ क) य + २८ कत इस में य + ४ त इस का और य^{४} + (म − प) य^{३} + (न − मप + क) य^{२} + (मक − नप) य + नक इस में य^{२} − पय + क इस का भाग देओ।

उत्तर, य^{२} + ५ अय + ७ क और य^{२} + मय + न।

(२९) य^{५} + अय^{४} + २ अय^{३} + (५ अ − ८) य^{२} + (४ अ − ९) य + ३ अ − ९ इस में य^{२} + य + ३ इस का भाग देओ।

उत्तर, य^{३} + (अ − १) य^{२} + (अ − २) य + अ − ३।

(३०) य^{६} + (अ − १) य^{५}र − (५ अ + १) यर^{५} + (४ अ + १) र^{६} इस में य^{२} − २ यर + र^{२} इस का भाग देओ।

उत्तर, य^{४} + (अ + १) य^{३}र + (२ अ + १) य^{२}र^{२} + (३ अ + १) यर^{३} + (४ अ + १) र^{४}

(३१) अ^{४} − (क^{४} − ३ अक^{२}ग + अ^{२}ग^{२}) य^{४} − (क^{३}ग − २ अकग^{२}) य^{५} इस में अ + कय + गय^{२} इस का भाग देओ।

उत्तर, अ^{३} − अ^{२}कय + (अक^{२} − अ^{२}ग) य^{२} − (क^{३} − २ अकग) य^{३}।

(३२) (अ + ४ क) य^{६} − (अ + ५ क) य^{५} − (अ − क) य + अ इस में य^{२} − २ य + १ इस का भाग देओ।

उत्तर, (अ + ४ क) य^{४} + (अ + ३ क) य^{३} + (अ + २ क) य^{२} + (अ + क) य + अ।

(३३) अ − (२ अ − ५) य + (अ − २) य^{२} − (अ + १२४) य^{८} + (२ अ + २१९) य^{९} − (अ + ९८) य^{१०} इस में १ − ३ य + ३ य^{२} − य^{३} इस का भाग देओ।

उत्तर, अ + (अ + ५) य + (अ + १३) य^{२} + (अ + २४) य^{३} + (अ + ३८) य^{४} + (अ + ५५) य^{५} + (अ + ७५) य^{६} + (अ + ९८) य^{७}।

(४) य^{१०} − (अ^{२} − २ क) य^{८} − (२ अग − क^{२} − २ घ) य^{६} − (२ अ − २ कघ + ग^{२}) य^{४} − (२ ग − घ^{२}) य^{२} − १ इस में य^{५} − अय^{४} + कय^{३} − गय^{२} + घय − १ इस का भाग देओ।

उत्तर, य^{५} + अय^{४} + कय^{३} + गय^{२} + घय + १।

(३५ यह सिद्ध करना चाहिये कि

$$\frac{१+२य+य^२}{१-२य+य^२} = १+४य+८य^२+१२य^३+१६य^४+\cdots \text{अनन्त ।}$$

$$\frac{१+नय+य^२}{१-२य+य^२} = १+(न+२)य+२(न+२)य^२+३(न+२)य^३\cdots \text{और}$$

$$\frac{१}{१-नय+य^२} = १+नय+(न^२-१)य^२+(न^३-२न)य^३$$

$$+(न^४-३न^२+१)य^४ + \text{इत्यादि ।}$$

---

५ घातक्रिया ।

३२ । जिस क्रिया से उद्दिष्ट* पद का अभीष्ट घात बनता है उस को घातक्रिया कहते हैं ।

रीति । एकरूप गुण्यगुणकरूप पदों का गुणनफल घात कहलाता है । इस लिये वह गुणनकर्म से बनता है ।

उदा० (१) अ इस का द्विघात अथवा वर्ग $= अ \times अ = अ^२$

अ इस का त्रिघात अथवा घन $= अ \times अ \times अ = अ^३$,

चतुर्घात $= अ \times अ \times अ \times अ = अ^४$, इत्यादि ।

और $-अ$ इस का वर्ग $= (-अ)(-अ) = अ^२$,

……… घन $= (-अ)(-अ)(-अ) = -अ^३$,

…… चतुर्घात $= (-अ)(-अ)(-अ)(-अ) = अ^४$,

पञ्चघात $= (-अ)(-अ)(-अ)(-अ)(-अ) = -अ^५$, इ० ।

इस से यह स्पष्ट है कि धन पद का कोई पूरा घात धन हि होता है और ऋण पद का पूरा घात घातमापक के समत्व विषमत्व के अनुसार धन या ऋण होता है अर्थात् घातमापक सम हो तो धन होता है और विषम हो तो ऋण होता है ।

---

* उद्दिष्ट अर्थात् मन में लिया हुआ ।

उदा० (२) अ + क इस के वर्ग, घन इत्यादि कुछ घात करो।

न्यास। $अ + क$

$अ + क$

$अ^{२} + अक$

$\quad + अक + क^{२}$

$(अ + क)^{२} = अ^{२} + २\,अक + क^{२}$

$अ + क$

$अ^{३} + २\,अ^{२}क + अक^{२}$

$\quad + अ^{२}क + २\,अक^{२} + क^{३}$

$(अ + क)^{३} = अ^{३} + ३\,अ^{२}क + ३\,अक^{२} + क^{३}$

$अ + क$

$अ^{४} + ३\,अ^{३}क + ३\,अ^{२}क^{२} + अक^{३}$

$\quad + अ^{३}क + ३\,अ^{२}क^{२} + ३\,अक^{३} + क^{४}$

$(अ + क)^{४} = अ^{४} + ४\,अ^{३}क + ६\,अ^{२}क^{२} + ४\,अक^{३} + क^{४}$

$अ + क$

$अ^{५} + ४\,अ^{४}क + ६\,अ^{३}क^{२} + ४\,अ^{२}क^{३} + अक^{४}$

$\quad + अ^{४}क + ४\,अ^{३}क^{२} + ६\,अ^{२}क^{३} + ४\,अक^{४} + क^{५}$

$(अ + क)^{५} = अ^{५} + ५\,अ^{४}क + १०\,अ^{३}क^{२} + १०\,अ^{२}क^{३} + ५\,अक^{४} + क^{५}$

इस से यह स्पष्ट है कि अ + क ऐसे द्वियुक्पद के वर्गादिघातों में पहिले पद में मूल के पहिले पद का घात रहता है और उस का घातमापक क्रम से दो, तीन इत्यादि होता है। और उस से उत्तरोत्तर पदों में जो मूल के पहिले पद के घात हैं उन में हर एक के घातमापक की संख्या में एक २ न्यून होता जाता है। और घातों के दूसरे पद में मूल के दूसरे पद के घात का घातमापक १ होता है और उस से उत्तरोत्तर पदों में जो मूल के दूसरे पद के घात हैं उन में हर एक के घातमापक की संख्या में एक २ अधिक होता जाता है और घातों के दूसरे पद का वारद्योतक घातमापक के समान होता है।

$\therefore\ (अ + क)^{न} = अ^{न} + न\,अ^{न-१}क + न_{१}\,अ^{न-२}क^{२} + न_{२}\,अ^{न-३}क^{३} + $ इ०।

यहां $न_1$, $न_2$ इत्यादि घात के तीसरे आदि पदों के वारद्योतक अभी स्पष्ट नहीं हुए हैं ।

उदा० (३) अ + क + ग इस का वर्ग और घन क्या है?

मूल = अ + क + ग

अ + क + ग

$अ^2 + अक + अग$

$+ अक + क^2 + कग$

$+ अग + कग + ग^2$

वर्ग = $अ^2 + २अक + २अग + क^2 + २कग + ग^2$

अ + क + ग

$अ^3 + २अ^2क + २अ^2ग + अक^2 + २अकग + अग^2$

$+ अ^2क + २अक^2 + २अकग + क^3 + २क^2ग + कग^2$

$+ अ^2ग + २अकग + २अग^2 + क^2ग + २कग^2 + ग^3$

घन = $अ^3 + ३अ^2क + ३अ^2ग + ३अक^2 + ६अकग + ३अग^2 + क^3 + ३क^2ग + ३कग^2 + ग^3$ ।

वा, अ + क + ग इस को अ + (क + ग) यों द्वियुक्पद मान के $(अ + क + ग)^2 = \{अ + (क + ग)\}^2 = अ^2 + २अ(क + ग) + (क + ग)^2 = अ^2 + २अक + २अग + क^2 + २कग + ग^2$ ।

और $(अ + क + ग)^3 = \{अ + (क + ग)\}^3 = अ^3 + ३अ^2(क + ग) + ३अ(क + ग)^2 + (क + ग)^3 = अ^3 + ३अ^2क + ३अ^2ग + ३अक^2 + ६अकग + ३अग^2 + क^3 + ३क^2ग + ३कग^2 + ग^3$ ये वर्ग और घन वैसे हि हैं जैसे पहिले सिद्ध हुए हैं ।

संयुक्त पद का वर्ग करने का दूसरा प्रकार ।

३३ । जिस संयुक्त पद का वर्ग करना हो उस के पहिले केवल-पद का वर्ग और दूने उस पहिले केवलपद से द्वितीय आदि पदों को गुणने से जो गुणफल होंगे उन को लिखो, फिर दूसरे केवलपद का वर्ग और दूने उस दूसरे केवलपद से तृतीयादि पदों को गुणने से जो

गुणनफल होंगे उन को लिखो यों अन्त तक करने से जो बनेगा सो उस संयुक्तपद का वर्ग है*।

उदा० (१) $(अ + क + ३\,ग)^{२} = अ^{२} + ४\,अक + ६\,अग + ४\,क^{२} + १२\,कग + ९\,ग^{२}$।

उदा० (२) $(य - र + ३\,ल - ५\,व)^{२} = य^{२} - २\,यर + ६\,यल - १०\,यव + र^{२} - ६\,रल + १०\,रव + ९\,ल^{२} - ३०\,लव + २५\,व^{२}$।

उदा० (३) $(अ^{२} + २\,अ - २)^{२} = अ^{४} + ४\,अ^{३} - ४\,अ^{२} + ४\,अ^{२} - ८\,अ + ४ = अ^{४} + ४\,अ^{३} - ८\,अ + ४$।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $३\,अय^{२}$ इस का वर्ग, घन और चतुर्घात क्या है?

उत्तर, $९\,अ^{२}य^{४}$, $२७\,अ^{३}य^{६}$ और $८१\,अ^{४}य^{८}$।

(२) $-५\,यर^{२}ल^{३}$ इस का वर्ग, घन और चतुर्घात क्या है?

उत्तर, $२५\,य^{२}र^{४}ल^{६}$, $-१२५\,य^{३}र^{६}ल^{९}$ और $६२५\,य^{४}र^{८}ल^{१२}$।

(३) $अ + २\,क$ इस का वर्ग और $अ - ४\,य$ इस का घन क्या है?

उत्तर, $अ^{२} + ४\,अक + ४\,क^{२}$ और $अ^{३} - १२\,अ^{२}य + ४८\,अय^{२} - ६४\,य^{३}$।

(४) $अ^{२} + २\,अ + १$ इस का वर्ग और घन क्या है?

उत्तर, $अ^{४} + ४\,अ^{३} + ६\,अ^{२} + ४\,अ + १$ और $अ^{६} + ६\,अ^{५} + १५\,अ^{४} + २०\,अ^{३} + १५\,अ^{२} + ६\,अ + १$।

---

* इस की युक्ति यह है। मानो कि, $अ + क + ग + घ + \cdots + ण$ इस का वर्ग करना है

तब $(अ+क+ग+\cdots ण)^{२} = \{अ + (क + ग + घ + \cdots ण)\}^{२}$

$= अ^{२} + २\,अ\,(क + ग + घ + \cdots ण) + (क+ग+घ+\cdots ण)^{२}$

इसी भांति $(क+ग+घ+\cdots ण)^{२} = \{क + (ग + घ \cdots ण)\}^{२}$

$= क^{२} + २क\,(ग+घ+\cdots ण) + (ग + घ + \cdots ण)^{२}$

फिर $(ग + घ \cdots ण)^{२} = \left\{ग + (घ + \cdots ण)\right\}^{२} = ग^{२} + २\,ग\,(घ+\cdots ण)+(घ+\cdots ण)^{२}$

इत्या० इत्या० इत्या०

अब उत्थापन से

$(अ + क + ग + घ + \cdots ण)^{२} = अ^{२} + २\,अ\,(क + ग + घ + \cdots ण) + क^{२} + २\,क\,(ग + घ + \cdots ण) + ग^{२} + २\,ग\,(घ + \cdots ण)^{२} +$ इत्या०। इस से उक्त रीति की उपपत्ति स्पष्ट होती है।

(५) अ^{२} + २ अक − २ क^{२} इस का और य^{२} + ४ यर − ८ र^{२} इस का वर्ग क्या है?

उत्तर, अ^{४} + ४ अ^{३}क − ८ अक^{३} + ४ क^{४} और य^{४} + ८ य^{३}र − ६४ यर^{३} + ६४ र^{४} ।

(६) २ य^{२} + ६ अय − ९ अ^{२} इस का वर्ग और अ^{२} + अक − क^{२} इस का घन क्या है?

उत्तर, ४ य^{४} + २४ अय^{३} − १०८ अ^{३}य + ८१ अ^{४} और अ^{६} + ३ अ^{५}क − ५ अ^{३}क^{३} + ३ अक^{५} − क^{६} ।

(७) य^{२} + २ यर − ४ र^{२} इस का और ४ अ^{२} + ६ अक − ९ क^{२} इस का घन कहो।

उत्तर, य^{६} + ६ य^{५}र − ४० य^{३}र^{३} + ९६ यर^{५} − ६४ र^{६} और ६४ अ^{६} + २८८ अ^{५}क − १०८० अ^{३}क^{३} + १४५८ अक^{५} − ७२९ क^{६} ।

(८) अ^{३} − २ अ^{२}क − २ अक^{२} + क^{३} इस का और य^{३} + ४ य^{२}र − ८ यर^{२} − ८ र^{३} इस का वर्ग कहो।

उत्तर, अ^{६} − ४ अ^{५}क + १० अ^{३}क^{३} − ४ अक^{५} + क^{६} और य^{६} + ८ य^{५}र − ८० य^{३}र^{३} + १२८ यर^{५} + ६४ र^{६} ।

(९) २४ अ^{४} − ८ अ^{३} + ४ अ^{२} − २ अ + १ इस का वर्ग क्या होगा?

उत्तर, ५७६ अ^{८} − ३८४ अ^{७} + २५६ अ^{६} − १६० अ^{५} + ९६ अ^{४} − ३२ अ^{३} + १२ अ^{२} − ४ अ + १ ।

(१०) य^{३} + २ य^{२}र + ८ यर^{२} − १६ र^{३} इस का वर्ग क्या होगा?

उत्तर, य^{६} + ४ य^{५}र + २० य^{४}र^{२} − २५६ यर^{५} + २५६ र^{६} ।

(११) य^{३} + य^{२} + य − १ इस का घन क्या है?

उत्तर, य^{९} + ३ य^{८} + ६ य^{७} + ४ य^{६} − ६ य^{४} − २ य^{३} + ३ य − १ ।

(१२) य^{४} + २ य^{३}र − २ य^{२}र^{२} + ४ यर^{३} + ४ र^{४} इस का वर्ग क्या है?

उत्तर, य^{८} + ४ य^{७}र + २८ य^{४}र^{४} + ३२ यर^{७} + १६ र^{८} ।

(१३) १ − अ इस का चतुर्घात और पञ्चघात क्या है?

उत्तर, $१ - ४ अ + ६ अ^{२} - ४ अ^{३} + अ^{४}$ और $१ - ५ अ + १० अ^{२} - १० अ^{३} + ५ अ^{४} - अ^{५}$ ।

(१४) $य^{३} + २ अय^{२} - ३ कय + ४ ग$ इस का वर्ग क्या है?

उत्तर, $य^{६} + ४ अय^{५} + (४ अ^{२} - ६ क) य^{४} - (१२ अक - ८ ग) य^{३} + (१६ अग + ९ क^{२}) य^{२} - २४ कगय + १६ ग^{२}$ ।

(१५) यह सिद्ध करो कि

$(य + ३ र)^{२} - (य + र)^{२} + (य - र)^{२} - (य - ३ र)^{२} = ८ यर$ ।

(१६) यह सिद्ध करो कि

$अ (अ - क - ग)^{२} + क (अ - क + ग)^{२} + ग (अ + क - ग)^{२} - (अ - क - ग) (अ - क + ग) (अ + क - ग) = ४ अकग$ ।

(१७) यह सिद्ध करो कि

$(अ + क + ग + घ)^{२} + (अ - क - ग + घ)^{२} + (अ - क + ग - घ)^{२} + (अ + क - ग - घ)^{२} = ४ (अ^{२} + क^{२} + ग^{२} + घ^{२})$ ।

(१८) यह सिद्ध करो कि

$(अ + क + ग)^{३} + अ^{३} + क^{३} + ग^{३} - \{ (अ + क)^{३} + (अ + ग)^{३} + (क + ग)^{३} \} = ६ अकग$ ।

(१९) यह सिद्ध करो कि

$(अ + क + ग)^{३} + (अ + क - ग)^{३} + (अ - क + ग)^{३} + (अ - क - ग)^{३} - १२ अ (क^{२} + ग^{२}) = ४ अ^{३}$ ।

(२०) यह सिद्ध करो कि

$(य + र + ल)^{४} + य^{४} + र^{४} + ल^{४} - \{ (य + र)^{४} + (य + ल)^{४} + (र + ल)^{४} \} = १२ यरल (य + र + ल)$ ।

(२१) यह सिद्ध करो कि

$(अ^{२} + १)^{२} (क^{२} + १)^{२} - ४ \{ अ (क^{२} - १) + क (अ^{२} - १) \}^{२} = \{ (अ^{२} - १) (क^{२} - १) - ४ अक \}^{२}$ ।

६ मूलक्रिया ।

३४ । जिस कर्म से उद्दिष्ट पद का अभीष्टमूल निकालते हैं उस को मूलक्रिया कहते हैं । यह घातक्रिया के उलटी है । इस लिये यदि बीजात्मक केवलपद का वर्गादिमूल निकालना हो तो वह पद किस का वर्गादि घात है? यों वर्गादि घात के खोजने से उस पद के वर्गादि-मूल का तुरंत बोध होगा ।

उदा० (१) $य^2$ इस का वर्गमूल $+य$ और $-य$ है क्यों कि $+य$ और $-य$ इन दोनों का भी वर्ग $+य^2$ यही होता है । इस लिये $य^2$ इस के वर्गमूल को $\pm य$ यों लिखते हैं । $\pm य$ इस का अर्थ धनात्मक वा ऋणात्मक य ।

उदा० (२) $-अ^3क^3$ इस का घनमूल $-अक$ यह है क्यों कि $-अक$ इस का घन $-अ^3क^3$ यही होता है ।

उदा० (३) $अ^2(य-र)^2$ इस का वर्गमूल $=\pm अ(य-र)$, $(य+१)^2(र-१)^4$ इस का वर्गमूल $=\pm(य+१)(र-१)^2$ और $-य^3(र+ल)^3$ इस का घनमूल $=-य(र+ल)$ ।

३५ । बीजात्मक संयुक्तपद का वर्गमूल निकालने की रीति का खोज । यह उद्दिष्ट संयुक्तपद के वर्ग में जो पद होंगे उन से सिद्ध होता है ।

सोचो कि $अ+क$ यह एक उद्दिष्ट पद है । इस का वर्ग $अ^2+२अक+क^2$ यह है । इस में अ इस के घात के घातमापक उत्तरोत्तर घटते हुए हैं । अब इस के पहिले पद $अ^2$, का वर्गमूल अ, मूल का पहिला पद है । इस का वर्ग उद्दिष्ट वर्ग में घटा के शेष $२अक+क^2$ के पहिले पद में मूल के दूने पहिले पद का भाग देने से क फल आने के योग्य है । यह मूल का दूसरा पद है । अब उस दूसरे पद को मूल के दूने पहिले पद में जोड़ देने से जो बनेगा उस को उसी दूसरे पद से गुण देने से $(२अ+क)क$ अर्थात् $२अक+क^2$ यह बनता है । इस को $२अक+क^2$ शेष में घटा देने से अवशिष्ट कुछ नहीं

रहता । और यदि अ + क + ग यह उद्दिष्ट त्रियुक्पद हो तो इस का वर्ग (अ + क)^{२} + २ (अ + क) ग + ग^{२} यह होता है । यहां पहिले स्थान में (अ + क) इस का वर्ग है इस से ऊपर की युक्ति से अ + क ये दो पद ज्ञात होंगे । फिर भी ऊपर ही की युक्ति से तीसरा भी पद ज्ञात होगा । केवल अ के स्थान में अ + क को और क के स्थान में ग को मानो इतना हि विशेष है । इसी भांति चतुर्युक्पद आदिओं के वर्गों में भी पदों की रचना जानो । इस से यह वर्गमूल निकालने की रीति उत्पन्न होती है ।

बीजात्मक संयुक्तपद का वर्गमूल निकालने की रीति ।

जिस पद का वर्गमूल निकालना है वह उद्दिष्ट वर्ग कहलावे उस को इस भांति लिखो कि जिस में किसी एक अक्षर के घातों के घातमापक उत्तरोत्तर घटते हुए वा बढ़ते हुए रहें । फिर पहिले पद के वर्गमूल को भजनफल के स्थान में लिख के उस के वर्ग को उद्दिष्ट-वर्ग में घटा देओ फिर भाजक के लिये उस पहिले पद के वर्गमूल को दूना करके भाजकस्थान में लिख देओ उस का शेष के पहिले पद में भाग देखने से जो फल आने के योग्य हो उस को भजनफल के स्थान के पद में और भाजक में भी जोड़ देओ । फिर इस जोड़े हुए भाजक को उसी फल से गुण के गुणनफल को शेष में घटा देओ । ऐसा बार २ अन्त तक करो । यों करने से जितने भजनफल के स्थान में पद आवें वे सब मिलके वर्गमूल है ।

उदा० (१) अ^{२} + ६ अक + ९ क^{२} इस का वर्गमूल क्या है ?

न्यास । अ^{२} + ६ अक + ९ क^{२} (अ + ३ क

अ^{२}

२ अ + ३ क) + ६ अक + ९ क^{२}

+ ६ अक + ९ क^{२}

० ०

यहां अ + ३क यह वर्गमूल आया और जो पहिले पद का वर्गमूल − अ लेके वर्गमूल निकालो तो − अ − ३क यह आवेगा। यह अ + ३क इस के धनर्णत्व को पलट देने से भी बनता है। यों किसी पद के वर्गमूल का धनर्णत्व व्यत्यास करने से दूसरा वर्गमूल बनता है। यह सर्वत्र जानो। भास्कराचार्यजी ने भी कहा है कि स्वमूले धनर्णे।

उदा० (२) $९\text{य}^{४} - १२\,\text{अय}^{३} + ४\,\text{अ}^{२}\text{य}^{२}$ इस का वर्गमूल क्या है?

न्यास। $९\text{य}^{४} - १२\,\text{अय}^{३} + ४\,\text{अ}^{२}\text{य}^{२}$ ($३\text{य}^{२} - २\,\text{अय}$

$९\text{य}^{४}$

$६\text{य}^{२} - २\,\text{अय}$) $- १२\,\text{अय}^{३} + ४\,\text{अ}^{२}\text{य}^{२}$

$- १२\,\text{अय}^{३} + ४\,\text{अ}^{२}\text{य}^{२}$

. .

उदा० (३) $\text{य}^{४} + ४\,\text{य}^{३} - ८\,\text{य} + ४$ इस का वर्गमूल क्या है?

न्यास। $\text{य}^{४} + ४\,\text{य}^{३} - ८\,\text{य} + ४$ ($\text{य}^{२} + २\,\text{य} - २$ यह वर्गमूल है।

$\text{य}^{४}$

$२\text{य}^{२} + २\text{य}$) $+ ४\,\text{य}^{३} - ८\,\text{य} + ४$

$+ ४\,\text{य}^{३} + ४\,\text{य}^{२}$

$२\text{य}^{२} + ४\text{य} - २$) $- ४\,\text{य}^{२} - ८\,\text{य} + ४$

$- ४\,\text{य}^{२} - ८\,\text{य} + ४$

. . .

उदा० (४) $\text{अ}^{२}\text{य}^{४} + २\,\text{अकय}^{३} + (२\,\text{अग} + \text{क}^{२})\,\text{य}^{२} + २\,\text{कगय} + \text{ग}^{२}$ इस का वर्गमूल क्या है?

न्यास। $\text{अ}^{२}\text{य}^{४} + २\,\text{अकय}^{३} + (२\,\text{अग} + \text{क}^{२})\,\text{य}^{२} + २\,\text{कगय} + \text{ग}^{२}$ ($\text{अय}^{२} + \text{कय} + \text{ग}$

$\text{अ}^{२}\text{य}^{४}$

$२\,\text{अय}^{२} + \text{कय}$) $+ २\,\text{अकय}^{३} + (२\,\text{अग} + \text{क}^{२})\text{य}^{२} + २\,\text{कगय} + \text{ग}^{२}$

$+ २\,\text{अकय}^{३} + \text{क}^{२}\text{य}^{२}$

$२\,\text{अय}^{२} + २\,\text{कय} + \text{ग}$) $२\,\text{अगय}^{२} + २\,\text{कगय} + \text{ग}^{२}$

$२\,\text{अगय}^{२} + २\,\text{कगय} + \text{ग}^{२}$

. . .

उदा० (५) $\frac{१}{४}+य$ इस का वर्गमूल क्या है?

न्यास । $\frac{१}{४}+य\ (\frac{१}{२}+य-य^२+२य^३-$ इत्यादि अनन्त ।

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad \frac{१}{४} \\
१+य)\ \ +य \\
\qquad\qquad\quad +य+य^२ \\
१+२य-य^२)\ \ -य^२ \\
\qquad\qquad\qquad -य^२-२य^३+य^४ \\
१+२य-२य^२+२य^३)\ +२य^३-य^४ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +२य^३+४य^४-४य^५+४य^६ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -५य^४+४य^५-४य^६ \text{ इ० अ० ।}
\end{array}
$$

यहां वर्गमूल में अनन्त पद आते हैं। इस लिये इस को अनन्तश्रेढी कहते हैं। और इस को

$\sqrt{\frac{१}{४}+य}=\frac{१}{२}+य-य^२+२य^३-$ इ० अ० यों लिखते हैं। और इस में यदि य का मान थोड़ा माना जावे तो दशमलवों में $\frac{१}{४}+य$ इस का आसन्न वर्गमूल लेने के लिये यह श्रेढी बहुत काम की है। यहां य के कल्पित थोड़े मान से श्रेढी के दो वा तीन पदों का उत्थापन करने से आसन्न मूल बनता है।

जैसा $\sqrt{\frac{१}{४}+य}$, वा, $\sqrt{.२५+य}=\frac{१}{२}+य-य^२+२य^३-$ इ० अ० इस में यदि $य=\frac{१}{१००}=.०१$ मानो तो $\sqrt{.२५+.०१}$ वा $\sqrt{.२६}=\frac{१}{२}+.०१-(.०१)^२+२\ (.०१)^३$ आसन्न $=.५+.०१-.०००१+.०००००२$ $=.५०९९०२$ आसन्न ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $१९६\ अ^२य^४$ इस का और $(अ-क)^२ग^२$ इस का वर्गमूल क्या है?
उत्तर, $\pm १४\ अय^२$ और $\pm(अ-क)ग$ ।

(२) $६४\ य^३र^६$ इस का और $-(य+र)^३(ल-व)^९$ इस का घनमूल क्या है?

उत्तर, $४यर^२$ और $-(य+र)(ल-व)^३$ ।

(३) $१६ त^{४}य^{४}द^{८}$ इस का और $८१ अ^{४} (क - ग)^{१२}$ इस का चतुर्घातमूल क्या है?

उत्तर, $\pm २ तयद^{२}$ और $\pm ३ अ (क - ग)^{३}$ ।

(४) $-३२ अ^{५}त^{२०}य^{३०}$ इस का और $(अ^{२} + य^{२})^{१०} (अ^{२} - य^{२})^{१५}$ इस का पञ्चघातमूल क्या है?

उत्तर, $- २ अत^{४}य^{६}$ और $(अ^{२} + य^{२})^{२} (अ^{२} - य^{२})^{३}$ ।

(५) $१५६२५ प^{६}फ^{१२}ब^{१८}$ इस का और $६४ (अ - क)^{६} (अ - ग)^{२४} (क - ग)^{४२}$ इस का षड्घातमूल क्या है?

उत्तर, $\pm ५ पफ^{२}ब^{३}$ और $\pm २ (अ - क) (अ - ग)^{४} (क - ग)^{७}$ ।

(६) $अ^{२} + १४ अ + ४९$ इस का और $९ य^{२} - ३० य + २५$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $अ + ७$ और $३ य - ५$ ।

(७) $९ य^{२} - १२ यर + ४ र^{२}$ इस का और $४ अ^{४} - २० अ^{२} + २५$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $३ य - २ र$ और $२ अ^{२} - ५$ ।

(८) $अ^{२}क^{२} + ६ अक + ९$ इस का और $४ अ^{२}य^{२} - १२ अकयर + ९ क^{२}र^{२}$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $अक + ३$ और $२ अय - ३ कर$ ।

(९) $अ^{४} - १० अ^{२}य + २५ य^{२}$ इस का और $अ^{२}य^{२} - २ अयर + र^{२}$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $अ^{२} - ५ य$ और $अय - र$ ।

(१०) $८१ अ^{४} + २१६ अ^{३}य + २१६ अ^{२}य^{२} + ९६ अय^{३} + १६ य^{४}$ इस का वर्गमूल कहो ।

उत्तर, $९ अ^{२} + १२ अय + ४ य^{२}$ ।

(११) $अ^{४} - २ अ^{३}य + ३ अ^{२}य^{२} - २ अय^{३} + य^{४}$ इस का और $४ य^{४} - ८ य^{३} + ४ य + १$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $अ^{२} - अय + य^{२}$ और $२ य^{२} - २ य - १$ ।

(१२) $अ^{४} - ६अ^{३} - ९अ^{२} + ५४अ + ८१$ इस का और $अ^{६} - ४अ^{५} + १०अ^{३} - ४अ + १$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $अ^{२} - ३अ - ९$ और $अ^{३} - २अ^{२} - २अ + १$ ।

(१३) $४अ^{४} + ४०अ^{३}य - ५००अय^{३} + ६२५य^{४}$ यह किस का वर्ग है?

उत्तर, $२अ^{२} + १०अय - २५य^{२}$ ।

(१४) किस का वर्ग करें तो $८१य^{४} + २१६य^{३}र - १९२यर^{३} + ६४र^{४}$ यह होगा?

उत्तर, $९य^{२} + १२यर - ८र^{२}$ ।

(१५) $६४अ^{४}य^{४} - ३२०अ^{३}य^{३} + १०००अय + ६२५$ इस का वर्गमूल कहो ।

उत्तर, $८अ^{२}य^{२} - २०अय - २५$ ।

(१६) $१ - २अ + ३अ^{२} - ४अ^{३} + ३अ^{४} - २अ^{५} + अ^{६}$ इस का और $य^{६} - ४य^{३}र^{२} + ४र^{४}$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $१ - अ + अ^{२} - अ^{३}$ और $य^{३} - २र^{२}$ ।

(१७) $४य^{६} + ८य^{५} + ५य^{२} - २य + १$ इस का और $य^{६} + २य^{५}ल + ५य^{४}ल^{२} - ८यल^{५} + ४ल^{६}$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $२य^{३} + २य^{२} - य + १$ और $य^{३} + य^{२}ल + २यल^{२} - २ल^{३}$ ।

(१८) $य^{६} - ४य^{५} + १०य^{४} - १५य^{२} + ३६य + ३६$ इस का और $अ^{२} + २अक^{२} + २अग^{३} + क^{४} + २क^{२}ग^{३} + ग^{६}$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $य^{३} - २य^{२} + ३य + ६$ और $अ + क^{२} + ग^{३}$ ।

(१९) किस का वर्ग $१६य^{२} - ४०यर + २५र^{२} + २४य - ३०र + ९$ यह है?

उत्तर, $४य - ५र + ३$ ।

(२०) $१६अ^{८} - ३२अ^{७}क + २८अ^{४}क^{४} - ४अक^{७} + क^{८}$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $४अ^{४} - ४अ^{३}क - २अ^{२}क^{२} - २अक^{३} + क^{४}$ ।

(२१) ६५६१ य^{८}र^{८} + ८७४८ य^{७}र^{७} + २२६८ य^{४}र^{४} + ९६ यर + १६ इस का वर्गमूल कहो ।

उत्तर, ८१ य^{४}र^{४} + ५४ य^{३}र^{३} − १८ य^{२}र^{२} + १२ यर + ४ ।

(२२) अ^{२} − २ अकय + (क^{२} + २ अग) य^{२} − २ कगय^{३} + ग^{२}य^{४} इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, अ − कय + गय^{२} ।

(२३) य^{६} + ८ य^{५} + (२ अ − ६४) य^{३} + (८ अ + ६४) य^{२} − १६ अय + अ^{२} इस का वर्गमूल क्या है ?

उत्तर, य^{३} + ४ य^{२} − ८ य + अ ।

(२४) य^{६} + २ कय^{५} + (क^{२} + २ ग) य^{४} + (२ कग + २ घ) य^{३} + (२ कघ + ग^{२}) य^{२} + २ गघय + घ^{२} इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, य^{३} + कय^{२} + गय + घ ।

(२५) (य^{२} + ५ य − २) (य^{२} + य − ८) + (२ य + ३)^{२} इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, य^{२} + ३ य − ५ ।

(२६) (५ य^{२} − २ य − १)^{२} − (८ य^{२} − ९ य + ३) (२ य^{२} + ५ य − ५) इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, ३ य^{२} − ७ य + ४ ।

(२७) (१२ य^{२} + ३४ य + १०)^{२} + (५ य^{२} − १४ य − २४)^{२} इस का वर्गमूल कहो ।

उत्तर, १३ य^{२} + २६ य + २६ ।

(२८) य (य + अ) (य + २ अ) (य + ३ अ) + अ^{४} इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, य^{२} + ३ अय + अ^{२} ।

(२९) १ − ८ य^{२} इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, १ − ४ य^{२} − ८ य^{४} − ३२ य^{६} − १६० य^{८} − इत्यादि अनन्त।

(३०) $१ + ४ अय - ४ कय^{२}$ इस का वर्गमूल क्या है ?

उत्तर, $१ + २ अय - २ (अ^{२} + क) य^{२} + ४ (अ^{३} + अक) य^{३}$ − इत्यादि अनन्त ।

३६ । बीजात्मक संयुक्तपद का कोई मूल निकालने का प्रकार ।

जब कि $(अ + क)^{न} = अ^{न} + न \cdot अ^{न - १} क + \cdots$ तो इस पर से जाना जाता है कि उद्दिष्टघात को सुधार के लिखने से अर्थात् उस में किसी एक अक्षर के घातों के घातमापक उत्तरोत्तर घटते वा बढ़ते हुए रहें यों लिखने से अभीष्टमूल के मूलमापक का द्योतक न अक्षर मान के जो उद्दिष्ट घात के पहिले पद का नघातमूल आवे वह अभीष्टमूल का पहिला पद है । उस के नघात को समग्र उद्दिष्ट घात में घटा देने से जो शेष बचेगा उस के पहिले पद में मूल के पहिले पद के $(न - १)$ घात को न से गुण के उस गुणनफल का भाग देने से अभीष्टमूल का दूसरा पद मिलता है । फिर मूल के ये दो पद मिल के जो एक द्वियुक्पद बनेगा उस को अभीष्टमूल का पहिला पद समझ के फिर पूर्ववत् क्रिया करने से अभीष्टमूल के सब पद स्पष्ट हो जायेंगे ।

उदा० (१) $य^{६} + ६ य^{५} - ४० य^{३} + ९६ य - ६४$ इस का घनमूल क्या है ?

न्यास । $य^{६} + ६ य^{५} - ४० य^{३} + ९६ य - ६४ \; (य^{२} + २ य - ४$ ।

$य^{६}$

$३ य^{४}) \; + ६ य^{५}$

$य^{६} + ६ य^{५} + १२ य^{४} + ८ य^{३} = (य^{२} + २ य)^{३}$

$३ य^{४}) \; - १२ य^{४}$

$य^{६} + ६ य^{५} - ४० य^{३} + ९६ य - ६४ = (य^{२} + २ य - ४)^{३}$

उदा० (२) $य^{८} + १२ य^{७} + ४२ य^{६} - १८९ य^{४} + ३७८ य^{२} - ३२४ य + ८१$ इस का चतुर्घातमूल क्या है ?

न्यास । $य^{८}+१२य^{७}+४२य^{६}-१८९य^{४}+३७८य^{२}-३२४य+८१\,(य^{२}+३य-३$

$$य^{८}$$

$$४य^{६})\;+१२य^{७}$$

$$य^{८}+१२य^{७}+५४य^{६}+१०८य^{५}+८१य^{४}=(य^{२}+३य)^{४}$$

$$४य^{६})\;-१२य^{६}$$

$$य^{८}+१२य^{७}+४२य^{६}-१८९य^{४}+३७८य^{२}-३२४य+८१=(य^{२}+३य-३)^{४}$$

अथवा जब कि वर्गमूल का वर्गमूल चतुर्घातमूल होता है इस लिये जिस बहुयुक्पद का चतुर्घातमूल जानना हो उस का पहिले (३५) वे प्रक्रम से वर्गमूल जान के फिर उस वर्गमूल का भी वर्गमूल जानो वह चतुर्घातमूल होगा ।

इस लिये पहिले वर्गमूल जानने के लिये न्यास ।

$$(य^{४}+६य^{३}+३य^{२}-१८य+९$$

$$य^{८}+१२य^{७}+४२य^{६}-१८९य^{४}+३७८य^{२}-३२४य+८१$$

$$य^{८}$$

$$२य^{४}+६य^{३})\;+१२य^{७}+४२य^{६}$$

$$+१२य^{७}+३६य^{६}$$

$$२य^{४}+१२य^{३}+३य^{२})\;६य^{६}-१८९य^{४}$$

$$६य^{६}+३६य^{५}+९य^{४}$$

$$२य^{४}+१२य^{३}+६य^{२}-१८य)\;-३६य^{५}-१९८य^{४}+३७८य^{२}$$

$$-३६य^{५}-२१६य^{४}-१०८य^{३}+३२४य^{२}$$

$$२य^{४}+१२य^{३}+६य^{२}-३६य+९)\;+१८य^{४}+१०८य^{३}+५४य^{२}-३२४य+८१$$

$$+१८य^{४}+१०८य^{३}+५४य^{२}-३२४य+८१$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

फिर इस वर्गमूल का भी वर्गमूल लेने के लिये न्यास ।

$$य^{४}+६य^{३}+३य^{२}-१८य+९\,(य^{२}+३य-३$$

$$य^{४}$$

$$२य^{२}+३य)\;+६य^{३}+३य^{२}$$

$$+६य^{३}+९य^{२}$$

$$२य^{२}+६य-३)\;-६य^{२}-१८य+९$$

$$-६य^{२}-१८य+९$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

इस प्रकार से भी $य^२ + ३ य - ३$ यह वही चतुर्घातमूल मिला जो ऊपर पूर्व प्रकार से मिला है ।

इसी भांति जब कि वर्गमूल का घनमूल अथवा घनमूल का वर्गमूल षड्घातमूल होता है और वर्गमूल के वर्गमूल का वर्गमूल अष्टघातमूल होता है इस लिये षड्घातमूल वा अष्टघातमूल जानना हो तो उक्त के अनुसार बार२ मूल लेने से भी अभीष्टमूल मिलेगा ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $४९ अ^२ + ७० अकय + २५ क^२य^२$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $७ अ + ५ कय$ ।

(२) $अ^४ - २ अ^३य^२ + ३ अ^२य^४ - २ अय^६ + य^८$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $अ^२ - अय^२ + य^४$ ।

(३) $६४ अ^४ - ४४८ अ^३क + २७४४ अक^३ + २४०१ क^४$ इस का वर्गमूल क्या है?

उत्तर, $८ अ^२ - २८ अक - ४९ क^२$ ।

(४) $२७ अ^३ - ५४ अ^२ + ३६ अ - ८$ इस का घनमूल क्या है?

उत्तर, $३ अ - २$ ।

(५) $य^३ + १५ अय^२ + ७५ अ^२य + १२५ अ^३$ इस का घनमूल कहो ।

उत्तर, $य + ५ अ$ ।

(६) $अ^३र^६ - ९ अ^२र^४ + २७ अर^२ - २७$ इस का घनमूल निकालो ।

उत्तर, $अर^२ - ३$ ।

(७) $६४ य^३ - ३३६ य^२र + ५८८ यर^२ - ३४३ र^३$ इस का घनमूल जानो ।

उत्तर, $४ य - ७ र$ ।

(८) $अ^६ + १२ अ^४क^२ + ४८ अ^२क^४ + ६४ क^६$ यह किस का घन है?

उत्तर, $अ^२ + ४ क^२$ ।

(९) $अ^६ + ३ अ^५य - ५ अ^३य^३ + ३ अय^५ - य^६$ इस का घनमूल क्या है?

उत्तर, $अ^२ + अय - य^२$ ।

(१०) $१६ य^{८} + ६४ य^{७}र - २२४ य^{५}र^{३} - ५६ य^{४}र^{४} + ३३६ य^{३}र^{५} - २१६ यर^{७} + ८१ र^{८}$ इस का चतुर्घातमूल क्या है?

उत्तर, $२ य^{२} + २ यर - ३ र^{२}$ ।

(११) $य^{५} - १५ य^{४}ल + ९० य^{३}ल^{२} - २७० य^{२}ल^{३} + ४०५ यल^{४} - २४३ ल^{५}$ इस का पञ्चघातमूल क्या है?

उत्तर, $य - ३ ल$ ।

(१२) $य^{६} + १२ य^{५} + ६० य^{४} + १६० य^{३} + २४० य^{२} + १९२ य + ६४$ इस का षड्घातमूल क्या है?

उत्तर, $य + २$ ।

(१३) $अ^{८} - ८ अ^{७}क + २८ अ^{६}क^{२} - ५६ अ^{५}क^{३} + ७० अ^{४}क^{४} - ५६ अ^{३}क^{५} + २८ अ^{२}क^{६} - ८ अक^{७} + क^{८}$ इस का अष्टघातमूल क्या है?

उत्तर, $अ - क$ ।

---

७ प्रकीर्णक ।

समशोधन वा पक्षान्तरनयन ।

३७ । बीजगणित में पद को वा पदों के समूह को पक्ष कहते हैं। ऐसे दो पक्षों में किसी एक हि राशि को वा दो समान राशिओं को जोड़ देना वा घटा देना इस क्रिया को समशोधन कहते हैं।

जो दो पक्ष समान हों उन को = इस समत्वद्योतक चिह्न की दोनों ओर लिख देने से जो रूप बनता है उस को समीकरण कहते हैं। और जब कि समान दो राशिओं में समान हि मिलाने से वा घटाने से उन का समत्व नष्ट नहीं होता इस लिये जो किसी समीकरण में समशोधन करो तो उस के पक्षों के समत्व का नाश न होगा।

इस लिये अ = क − ग + घ, इस समीकरण के दोनों पक्षों में जो ग जोड़ देओ

तो   अ + ग = क − ग + घ + ग,

अर्थात् अ + ग = क + घ ।   ये भी दोनों पक्ष समान हैं ।

इसी भांति पूर्व दोनों पक्षों में घ घटा देने से

अ − घ = क − ग + घ − घ,

अर्थात् अ − घ = क − ग ।   ये भी समान हैं ।

अथवा दोनों पक्षों में क को घटा देने से और ग को जोड़ देने से

अ − क + ग = क − ग + घ − क + ग,

अर्थात् अ − क + ग = घ ।   ये भी पक्ष परस्पर समान हैं ।

अथवा और भी जो दोनों पक्षों में अ को घटा देओ और ग को जोड़ देओ

तो   अ − अ + ग = क − ग + घ − अ + ग,

अर्थात्   ग = क + घ − अ ये दोनों पक्ष समान हैं ।

इत्यादि ।

इस में स्पष्ट देख पड़ता है कि समीकरण में उस के किसी पद का समशोधन करने से वह पद अपने धनत्व को वा ऋणत्व को पलट के दूसरे पक्ष में जाता है । इस लिये समीकरण में जो किसी पद का समशोधन करना हो तो उस पद को उस के पक्ष में से निकाल के उस का धनर्ण चिह्न पलटा के दूसरे पक्ष में लिखते हैं और इसी लिये इस कर्म का दूसरा नाम पक्षान्तरनयन रक्खा है ।

इसी प्रकार से जो दो पक्ष समान न हों अर्थात् विषम हों उन को >इस वा <इस विषमत्वद्योतक चिह्न की दोनों ओर लिखने से जो रूप बने सो विषमीकरण कहावे । और जब कि विषम दो राशिओं में समान हि मिलाने से वा घटाने से वे वैसे हि विषम बने रहते हैं । इस लिये जो किसी विषमीकरण में समशोधन करो तो उस के पक्ष वैसे हि विषम बने रहेंगे जैसे पूर्व में हैं ।

इस लिये जो $अ - क > ग - घ$ इस विषमीकरण के दोनों पक्षों में घ जोड़ देओ तो $अ - क + घ > ग - घ + घ$,

अर्थात् $अ - क + घ > ग$ । ये भी दोनों पक्ष क्रम से अधिक न्यून हैं ।

इसी भांति जो पूर्व दोनों पक्षों में क जोड़ देओ

तो $अ - क + क > क + ग - घ$,

अर्थात् $अ > क + ग - घ$ ये भी पक्ष क्रम से अधिक न्यून हैं। और भी जो $अ - य < क + घ$ इन दोनों पक्षों में य जोड़ देओ

तो $अ - य + य < क + घ + य$,

अर्थात् $अ < क + घ + य$ । ये भी दोनों पक्ष क्रम से वैसे हि न्यून अधिक हैं जैसे $अ - य$ और $क + घ$ ये हैं ।

इस से जान पड़ता है कि $>$ इस वा $<$ इस चिह्न की दोनों ओर जो दो पक्ष हों उन में किसी एक पद का पक्षान्तरनयन करने से उन पक्षों का वैषम्य बिगड़ता नहीं ।

अनुमान १ । समीकरण के दो पक्षों के हर एक पद का धन ऋण चिह्न पलट देने से भी उन दो पक्षों का साम्य बिगड़ता नहीं क्योंकि हर एक पद माना पक्षान्तर में गया सा होता है ।

अनुमान २ । यदि एक चिह्न से जुड़ा हुआ एक हि पद दोनों पक्षों में होवे तो उस को छेक दे सकते हैं ।

इसी प्रसंग में विषमीकरणसंबन्धि कुछ सिद्धान्त लिखते हैं ।

(१) जब कि धनात्मक वा ऋणात्मक पद का वर्ग धन हि होता है

तो $(य - र)^2$, वा, $य^2 - २यर + र^2 > ०$

$\therefore$ पक्षान्तरनयन से $य^2 + र^2 > २यर$

इस से जान पड़ता है कि कोई दो विषम राशिओं के वर्गों का योग सर्वदा उन के दूने गुणनफल से अधिक होता है ।

(२) तीन विषम राशिओं में हर एक दो २ राशिओं के गुणनफलों के योग से उन तीन राशिओं के वर्गों का योग सर्वदा बड़ा होता है।

इस की उपपत्ति ।

जब कि ऊपर के सिद्धान्त से सिद्ध है कि ।

$य^2 + र^2 > २यर; य^2 + ल^2 > २यल$ और $र^2 + ल^2 > २रल$

तब अधिक पक्षों का योग भी न्यून पक्षों के योग से बड़ा हि होगा

$\therefore २य^2 + २र^2 + २ल^2 > २यर + २यल + २रल$

और $\therefore य^2 + र^2 + ल^2 > यर + यल + रल$ यों उपपन्न हुआ ।

इसी युक्ति से यह भी तुरन्त सिद्ध होगा कि

$३(य^2 + र^2 + ल^2 + व^2) > २(यर + यल + यव + रल + रव + लव)$

वा, $य^2 + र^2 + ल^2 + व^2 > \frac{२}{३}(यर + यल + यव + रल + रव + लव)$ ।

(३) दो विषम राशिओं के योग के वर्ग से उन राशिओं के वर्गों का योग दूना सर्वदा बड़ा होता है । यों तीन विषम राशिओं के योग के वर्ग से उन के वर्गों का योग तिगुना और चार विषम राशिओं के योग के वर्ग से उन के वर्गों का योग चौगुना सर्वदा बड़ा होता है । और इसी भांति आगे भी जानो ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि $य^2 + र^2 > २यर$;

इस लिये दोनों पक्षों में $य^2 + र^2$ जोड़ देने से

$$२य^2 + २र^2 > य^2 + २यर + र^2,$$

अर्थात् $२(य^2 + र^2) > (य + र)^2$ यों उपपन्न हुआ ।

और जब कि $(य + र + ल)^2 = य^2 + र^2 + ल^2 + २यर + २यल + २रल$

$\therefore$ पक्षान्तरनयन से

$२यर + २यल + २रल = (य + र + ल)^2 - य^2 - र^2 - ल^2$ ।

परन्तु ऊपर के दूसरे सिद्धान्त के अनुसार ।

$$२य^2 + २र^2 + २ल^2 > २यर + २यल + २रल$$

$\therefore २य^2 + २र^2 + २ल^2 > (य + र + ल)^2 - य^2 - र^2 - ल^2$

और $\therefore$ पक्षान्तरनयन से

$३ य^२ + ३ र^२ + ३ ल^२$ अर्थात् $३ (य^२ + र^२ + ल^२) > (य + र + ल)^२$

यों उपपन्न हुआ ।

इसी युक्ति से

$$४ (य^२ + र^२ + ल^२ + व^२) > (य + र + ल + व)^२$$

इत्यादि भी तुरन्त उपपन्न होता है ।

(४) तीन विषम राशिओं के गुणनफल को उन तीन राशिओं के योग से गुण देओ तो उस गुणनफल से भी उन तीन राशिओं के चतुर्घातों का योग बड़ा होता है ।

इस की उपपत्ति ।

ऊपर के दूसरे सिद्धान्त के अनुसार जब कि

$य^२ + र^२ + ल^२ > यर + यल + रल$

तो इस में य, र, ल इन के स्थान में उन के वर्गों को रखने से स्पष्ट है कि

$य^४ + र^४ + ल^४ > य^२र^२ + य^२ल^२ + र^२ल^२$ यों होगा और जब कि $य^२ + र^२ > २ यर$ इस लिये $य^२ल^२ + र^२ल^२ > २ यरल^२$ । इसी भांति सिद्ध होता है कि $य^२र^२ + र^२ल^२ > २ यर^२ल$ और $य^२र^२ + य^२ल^२ > २ य^२रल$ और जब कि अधिक पक्षों का योग न्यून पक्षों के योग से बड़ा हि होता है ।

$\therefore$ $२ य^२र^२ + २ य^२ल^२ + २ र^२ल^२ > २ यरल^२ + २ यर^२ल + २ य^२रल$

अर्थात् $य^२र^२ + य^२ल^२ + र^२ल^२ > यरल (य + र + ल)$

और ऊपर सिद्ध किया है कि $य^४ + र^४ + ल^४ > य^२र^२ + य^२ल^२ + र^२ल^२$

इस से अति स्पष्ट है कि

$य^४ + र^४ + ल^४ > यरल (य + र + ल)$ यह उपपन्न हुआ ।

(५) यह सिद्ध करो कि जब $य^२ = अ + क$ और $र^२ = अ - क$ तो अ से यर न्यून होता है ।

न्यास । $य^२ = अ + क$ और $र^२ = अ - क$

पहिले दो पक्षों में क्रम से दूसरे दोनों पक्षों को जोड़ देने से,

$य^2 + र^2 = (अ + क) + (अ - क)$, वा, $य^2 + र^2 = २अ$ ।

परन्तु $य^2 + र^2 > २यर$, $\therefore २अ > २यर \therefore अ > यर$ । यों सिद्ध हुआ।

(६) दो विषम राशिओं के वर्गयोग को उन्हीं दो राशिओं के गुणनफल से गुण देने से जो फल होगा उस से उन दो राशिओं के चतुर्घातों का योग सर्वदा बड़ा होता है ।

उस की उपपत्ति ।

मानो य और र ये दो राशि हैं

अब इन में जो य राशि र राशि से बड़ा हो

तो स्पष्ट है कि $य^3 > र^3$ ।

इन दोनों पक्षों को $य - र$ इस धनात्मक अन्तर से गुण देने से

$$य^4 - य^3 र > यर^3 - र^4,$$

तब पक्षान्तरनयन से

$$य^4 + र^4 > य^3र + यर^3,$$

अर्थात् $य^4 + र^4 > यर\,(य^2 + र^2)$ ।

और जो दो राशिओं में य राशि र राशि से छोटा हो

अर्थात् $र > य$ तो $र^3 > य^3$ ।

अब इन दोनों पक्षों को $र - य$ इस धन अन्तर से गुण देने से

$$र^4 - यर^3 > य^3र - य^4,$$

तब पक्षान्तरनयन से

$$य^4 + र^4 > य^3र + यर^3,$$

अर्थात् $य^4 + र^4 > यर\,(य^2 + र^2)$ ।

इस प्रकार से य और र इन राशिओं में य से र बड़ा हो वा छोटा हो तो भी $य^4 + र^4 > यर\,(य^2 + र^2)$ यही सिद्ध होता है । यों उपपन्न हुआ ।

अभ्यास के लिये विषमीकरण के उदाहरण ।

(१) यह सिद्ध करो कि $य^2 > ६य - ९$ ।

(२) यह सिद्ध करो कि (अ^{२} + क^{२}) (ग^{२} + घ^{२}) यह (अग + कघ)^{२} इस से सर्वदा बड़ा होगा परंतु जो इस में अ = ग, क = घ और अग = कघ, न हो।

(३) यह सिद्ध करो कि (अ^{२} − क^{२}) (ग^{२} − घ^{२}) यह (अग − कघ)^{२} इस से सर्वदा छोटा होगा परंतु जो इस में अ = ग, क = घ और अग = कघ, न हो।

(४) यह सिद्ध करो कि (अ + क)^{४} इस से ८ (अ^{४} + क^{४}) यह सर्वदा बड़ा होगा परंतु जो अ और क परस्पर समान न हों।

३८। संक्रमण। दो राशिओं के योग और अन्तर पर से उन दो राशिओं को जानने के प्रकार को संक्रमण कहते हैं।

मानो य और र ये दो अक्षर कोइ दो राशिओं के द्योतक हैं और इन में य बड़े राशि का और र छोटे राशि का द्योतक है और अ उन के योग का और क उन के अन्तर का द्योतक है।

तब य + र = अ और य − र = क होगा।

∴ (य + र) + (य − र) = अ + क वा य = $\frac{१}{२}$ (अ + क) और
(य + र) − (य − र) = अ − क वा र = $\frac{१}{२}$ (अ − क)।

इस से स्पष्ट है कि कोइ दो राशिओं का योग और अन्तर इन के योग का आधा बड़े राशि के समान होता है और इन के अन्तर का आधा छोटे के समान होता है। भास्कराचार्यजी ने भी लिखा है कि,

योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धितस्तौ राशी स्मृतं संक्रमणाख्यमेतत्।

३९। इस प्रक्रम में अनेक उपयोगि सिद्धान्तों को कहते हैं जो सामान्य गणित से उत्पन्न होते हैं।

[१] जब कि (अ + क)^{२} = अ^{२} + २ अक + क^{२},
और (अ − क)^{२} = अ^{२} − २ अक + क^{२}।

तो इस से स्पष्ट है कि कोइ दो राशिओं के योग और अन्तर

का वर्ग क्रम से उन दो राशिओं के वर्गों के योग में उन्हीं दो राशिओं के द्विगुणित गुणनफल को जोड़ देने वा घटा देने से जो बने उस के समान होता है । जैसा,

(१) $(३ अ + ५ य)^२ = (३ अ)^२ + २ (३ अ \times ५ य) + (५ य)^२$

$= ९ अ^२ + ३० अय + २५ य^२$ ।

(२) $(५ य - १३)^२ = २५ य^२ - १३० य + १६९$ ।

(३) $(७ प - ८ फ)^२ = ४९ प^२ - ११२ पफ + ६४ फ^२$ ।

[२] जब कि $(अ + क) \times (अ - क) = अ^२ - क^२$

तो इस से ज्ञान पड़ता है कि कोइ दो राशिओं के योग और अन्तर का गुणनफल उन के वर्गों के अन्तर के समान होता है । जैसा,

(१) $(२ य + ३ र) \times (२ य - ३ र) = ४ य^२ - ९ र^२$ ।

(२) $(अ + क + ग)(अ + क - ग) = \{(अ + क) + ग\}\{(अ + क) - ग\}$

$= (अ + क)^२ - ग^२ = अ^२ + २ अक + क^२ - ग^२$ ।

(३) $(य^२ + यर + र^२)(य^२ - यर + र^२)$

$= \{(य^२ + र^२) + यर\} + \{(य^२ + र^२) - यर\}$

$= (य^२ + र^२)^२ - (यर)^२ = य^४ + २ य^२र^२ + र^४ - य^२र^२ = य^४ + य^२र^२ + र^४$ ।

अनुमान । किसी राशि के समान दो विभागों का गुणनफल उस राशि के विषम दो विभागों के गुणनफल से बड़ा होता है ।

मानो कि २ अ एक राशि है और इस के अ + क और अ − क ये दो विभाग हैं तब इन दो विभागों का गुणनफल

$(अ + क)(अ - क) = अ^२ - क^२$ यह होगा ।

अब जो क = ० मानो तो $अ^२ - क^२$ इस गुणनफल का मान सब से बड़ा होगा यह स्पष्ट है । परंतु तब वे विभाग प्रत्येक अ के समान होंगे अर्थात् दोनों परस्पर समान होंगे । इस लिये समान हि दो विभागों का गुणनफल सब से बड़ा होगा । यह सिद्ध हुआ ।

[३] जब कि (य + अ) (य + क) = $य^२$ + (अ + क) य + अक ।

तो इस से स्पष्ट है कि य + अ और य + क ऐसे दो द्वियुक्पदों का गुणनफल त्रियुक्पद होता है और इस में पहिला पद य का वर्ग होता है, दूसरे पद में य का वारद्योतक अ + क अर्थात् उन द्वियुक्पदों के द्वितीय पदों का योग होता है और तीसरा पद अक अर्थात् उन द्वितीय पदों का गुणनफल होता है । जैसा,

(१) (य + ५) (य + ७) = $य^२$ + (५ + ७) य + ५ × ७
= $य^२$ + १२ य + ३५ ।

(२) (य − ३) (य − ४) = $य^२$ + (− ३ − ४) य + (− ३) × (− ४)
= $य^२$ − ७ य + १२ ।

(३) (य + ६) (य − २) = $य^२$ + (६ − २) य + ६ × (− २)
= $य^२$ + ४ य − १२ ।

इसी भांति

जब कि (य + अ) (य + क) (य + ग) = $य^३$ + (अ + क + ग) $य^२$ + (अक + अग + कग) य + अकग ।

तो इस में भी स्पष्ट दिखाता है कि य + अ, य + क और य + ग ऐसे तीन द्वियुक्पदों के गुणनफल में पहिला पद $य^३$, दूसरे पद में $य^२$ का वारद्योतक अ, क और ग इन का योग, तीसरे पद में अ, क और ग इन में दो २ के गुणनफलों का योग य का वारद्योतक होता है और चौथा पद अ, क और ग इन का गुणनफल होता है । जैसा,

(१) (य + २) (य + ३) (य + ४)
= $य^३$ + (२ + ३ + ४) $य^२$ + (२ × ३ + २ × ४ + ३ × ४) य + २ × ३ × ४
= $य^३$ + ९ $य^२$ + २६ य + २४ ।

(२) (य + १) (य − ३) (य + ५)
= $य^३$ + (१−३+५) $य^२$ + {(१×−३) + (१×५) + (−३×५)} य + १ × −३×५
= $य^३$ + ३ $य^२$ − १३ य − १५ ।

(३) (य − १) (य − २) (य − ३)

= य³ + (−१ − २ − ३) य² + {(−१)(−२) + (−१)(−३) + (−२)(−३)} य
  + (−१ × −२ × −३)

= य³ − ६ य² + ११ य − ६ ।

[४] जब कि (अ² − अक + क²) (अ + क) = अ³ + क³
  और (अ² + अक + क²) (अ − क) = अ³ − क³ ।

तो इस में स्पष्ट देख पड़ता है कि कोइ दो राशिओं के वर्गों के योग में उन्हीं राशिओं के गुणनफल को घटा देने वा जोड़ देने से जो बनता है उस को क्रम से उन दो राशिओं के योग वा अन्तर से गुण देने से उन राशिओं के घनों का योग वा अन्तर बनता है ।

४० । जो राशि आप और १ छोड़ किसी दूसरे राशि से निःशेष भागा नहीं जाता उस को दृढ कहते हैं और जो भागा जाता है उस को अदृढ कहते हैं और अदृढ राशि दो वा बहुत दृढ राशिओं का गुणनफल होता है । जैसा,

अ, क, अ + क, य − २ल इत्यादि ये सब दृढ राशि हैं और
२अ, य², अय, अ (अ − क) इत्यादि ये सब अदृढ राशि हैं ।

४१ । इस प्रक्रम में अदृढ राशि के दृढ गुण्यगुणकरूप अवयव करने के प्रकार दिखलाते हैं । इस दृढ गुण्यगुणकरूप अवयव को खण्ड कहते हैं ।

[१] किसी संयुक्तपदरूप अदृढ राशि के जो सब पद किसी एक हि केवलपद से निःशेष भागे जाते हों तो उस केवलपदरूप खण्ड को अलग करना योगरीति से बहुत सुगम है । जैसा,

(१) अक − क² = (अ − क) क ।

(२) अ³य² − ३ अ²य³ = (अ − ३ य) अ²य² ।

(३) $५ अ^४य + १० अ^३य^२ + ५ अ^२य^३ = ५ अ^२य (अ^२ + २ अय + य^२)$

$= ५ अ^२य (अ + य)^२$ ।

(४) $५ य^३ + १० य^२र + ३ यर + ६ र^२ = ५ य^२ (य + २र) + ३र (य + २र)$

$= (५ य^२ + ३ र) (य + २र)$ ।

(५) $अ^५ + ७ अ^४ + अ^३ + ७ अ^२ = अ^२ (अ^३ + ७ अ^२ + अ + ७)$

$= अ^२ \{ अ^२ (अ + ७) + (अ + ७) \} = अ^२ (अ^२ + १) (अ + ७)$ ।

[२] जो उद्दिष्ट राशि दो पदों के वर्गों का अन्तर है उस के खण्ड करने हों तो एक खण्ड उन दो पदों का योग, और एक उन दोनों का अन्तर ऐसे दो खण्ड होंगे । इस की उपपत्ति (३९) वे प्रक्रम के दूसरे सिद्धान्त से स्पष्ट है । जैसा,

(१) $४ अ^२ - ९ य^२ = (२ अ + ३ य) (२ अ - ३ य)$ ।

(२) $१ - य^४ = (१ + य^२) (१ - य^२) = (१ + य^२) (१ + य) (१ - य)$ ।

(३) $४ अ^२क^२ - (अ^२ + क^२ - ग^२)^२ = (२ अक)^२ - (अ^२ + क^२ - ग^२)^२$

$= (२ अक + अ^२ + क^२ - ग^२) (२ अक - अ^२ - क^२ + ग^२)$

$= \{ (अ + क)^२ - ग^२ \} \{ ग^२ - (अ - क)^२ \}$

$= (अ + क + ग) (अ + क - ग) (ग + अ - क) (ग - अ + क)$ ।

इसी भांति सिद्ध करो कि

(१) $य^२ - र^२ - ल^२ + व^२ - २ (यव - रल)$

$= (य + र - ल - व) (य - र + ल - व)$ ।

(२) $अ^{१६} - क^{१६} = (अ^८ + क^८) (अ^४ + क^४) (अ^२ + क^२) (अ + क) (अ - क)$

(३) $४ (अघ + कग)^२ - (अ^२ - क^२ - ग^२ + घ^२)^२$

$= (-अ + क + ग + घ) (अ - क + ग + घ) (अ + क - ग + घ) (अ + क + ग - घ)$ ।

[३] जो त्रियुक्पद $य^२ + पय + फ$ इस भांति का हो उस में जिन दो संख्याओं का गुणनफल फ होगा उन का योग जो प के समान हो तो (३९) वे प्रक्रम के तीसरे सिद्धान्त से उस त्रियुक्पद के खण्ड तुरन्त ज्ञात होंगे । जैसा,

(१) $य^2 + ७ य + १२ = य^2 + (३ + ४) य + ३ \times ४$
$$= (य + ३)(य + ४) ।$$

(२) $य^2 - ८ य + ७ = य^2 + (-१ - ७) य + (-१)(-७)$
$$= (य - १)(य - ७) ।$$

(३) $य^2 - २ य - ३५ = य^2 + (५ - ७) य + ५ \times (-७)$
$$= (य + ५)(य - ७) ।$$

[४] जो उद्दिष्ट राशि दो पदों के घनों का योग वा अन्तर है उस के खण्ड करने हों तो क्रम से एक खण्ड उन दो पदों के गुणनफल से घटा हुआ वा जुडा हुआ उन दो पदों के वर्गों का योग, और एक उन दो पदों का योग वा अन्तर ऐसे दो खण्ड होंगे । इस की उपपत्ति (३९) वे प्रक्रम के चौथे सिद्धान्त से स्पष्ट है । जैसा,

(१) $अ^3 + ८ क^3 = (अ^2 - २ अक + ४ क^2)(अ + २ क)$ ।

(२) $अ^6 - य^6 = (अ^3 + य^3)(अ^3 - य^3)$
$$= (अ^2 - अय + य^2)(अ + य)(अ^2 + अय + य^2)(अ - य) ।$$

(३) $अ^3 + ३ अ^2क + ३ अक^2 + क^3 - ग^3$
$$= (अ + क)^3 - ग^3$$
$$= \{ (अ + क)^2 + ग (अ + क) + ग^2 \} (अ + क - ग)$$
$$= (अ^2 + २ अक + क^2 + अग + कग + ग^2)(अ + क - ग) ।$$

[५] कहीं २ उद्दिष्ट अदृढ राशि के खण्ड करने के लिये उस में कितने एक पदों के अपनी बुद्धि से ऐसे दो वा अधिक भाग करो वा उस अदृढ राशि में ऐसे एक वा अनेक पद जोड के घटा देओ कि जिन से अदृढ राशि पहिले प्रकारों से खण्ड करने के योग्य होवे । यह कल्पना गणित में अति अभ्यास होने से आप से आप मन में प्रगट होती है । जैसा,

(१) $य^2 + ५ यर + ६ र^2 = य^2 + २ यर + ३ यर + ६ र^2$
$$= य (य + २ र) + ३ र (य + २ र) = (य + ३ र)(य + २ र) ।$$

(२) $अ^2 + ४ अक - ५ क^2 = अ^2 - अक + ५ अक - ५ क^2$

$= अ (अ - क) + ५ क (अ - क) = (अ + ५ क) (अ - क)$ ।

(३) $य^3 + य + १० = य^3 + २ य^2 - २ य^2 - ४ य + ५ य + १०$

$= य^2 (य + २) - २ य (य + २) + ५ (य + २)$

$= (य^2 - २ य + ५) (य + २)$ ।

(४) $अ^2 + ४ अक + ३ क^2 = अ^2 + ४ अक + ४ क^2 - क^2$

$= (अ + २ क)^2 - क^2 = (अ + ३ क) (अ + क)$ ।

(५) $य^4 + य^2 ल^2 + ल^4 = य^4 + २ य^2 ल^2 + ल^4 - य^2 ल^2$

$= (य^2 + ल^2)^2 - (यल)^2 = (य^2 + यल + ल^2) (य^2 - यल + ल^2)$ ।

(६) $अ^3 + ६ अ^2 क + १२ अक^2 + ७ क^3$

$= अ^3 + ६ अ^2 क + १२ अक^2 + ८ क^3 - क^3$

$= (अ + २ क)^3 - क^3$

$= \left\{ (अ + २ क)^2 + (अ + २ क) क + क^2 \right\} (अ + क)$

$= (अ^2 + ५ अक + ७ क^2) (अ + क)$ ।

[६] जिस बहुयुक्पद को सुधार के लिखने से उस के आदि में जो मुख्य अक्षर का (वा मुख्य पद का) सब से बड़ा घात होगा उस का वारद्योतक १ हो और अन्त के पद में मुख्य अक्षर (वा पद) कोई न हो वह बहुयुक्पद जो किसी द्वियुक्पद से निःशेष होने के योग्य हो तो उस द्वियुक्पद के जानने का प्रकार ।

उद्दिष्ट बहुयुक्पद को सुधार के लिखो अर्थात् उस में मुख्य अक्षर के (वा किसी मुख्य पद के) घातों के घातमापक क्रम से घटते हुए रहें यों बना के लिखो तब अन्त में जो पद ऐसा होगा कि जिस में मुख्य अक्षर (वा पद) कोई न हो वह जितनी अङ्कात्मक वा बीजात्मक संख्याओं से निःशेष होता हो अर्थात् उस के जितने अपवर्तन हों उन में हर एक अपवर्तन को धन और ऋण मान के उस को उस मुख्य अक्षर (वा पद) के समान मानो और उस से उद्दिष्ट पद में मुख्य अक्षर (वा पद) का

उत्थापन करो। इस उत्थापन से जिस अपवर्तन से उद्दिष्ट पद का मान शून्य होवे उस को मुख्य अक्षर (वा पद) में घटा देओ सो अन्तर उस उद्दिष्ट पद का एक खण्ड होगा अर्थात् उस अन्तर से वह उद्दिष्ट पद निःशेष होगा।

उदा० (१) $य^2 - ७य + १०$ इस का जो द्वियुक्पद खण्ड हो उस को अलग करो।

यहां अन्त के १० इस पद के १, २, ५ और १० इतने अपवर्तन हैं इन में पहिले $य = +१$ मान के उत्थापन करने से

$$१^2 - ७ \times १ + १० = १ - ७ + १० = ४ ।$$

फिर $य = -१$ मान के उत्थापन करने से

$$(-१)^2 + ७ \times १ + १० = १ + ७ + १० = १८ ।$$

फिर $य = +२$ मान के उत्थापन से

$$२^2 - ७ \times २ + १० = ४ - १४ + १० = ०$$

यों २ इस दूसरे अपवर्तन से उद्दिष्ट पद का मान ० होता है

$\therefore य - २$ यह उद्दिष्ट पद का एक खण्ड है।

इसी भांति $य = +५$ मान के उत्थापन से

$$५^2 - ७ \times ५ + १० = २५ - ३५ + १० = ०$$

यों ५ इस तीसरे अपवर्तन को य के समान मानने से भी उद्दिष्ट पद का मान ० होता है।

$\therefore य - ५$ यह भी उद्दिष्टपद का एक खण्ड है।

इस प्रकार से

$$य^2 - ७य + १० = (य - २)(य - ५) \text{ यों खण्ड अलग हुए ।}$$

उदा० (२) $य^3 + २य^2 - ५य - ६$ इस में जो खण्ड द्वियुक्पद हों उन को अलग करो।

इस में अन्त के ६ इस पद के १, २, ३ और ६ ये चार अपवर्तन हैं इन में $-$१, $+$२ और $-$३ इन तीनों को य के समान मान के उद्दिष्ट पद में य का अलग २ उत्थापन करने से उद्दिष्ट पद का मान ० होता है। इस लिये उद्दिष्ट पद में य $+$ १, य $-$ २ और य $+$ ३ ये तीन खण्ड हैं

$\therefore$ य^{३} $+$ २य^{२} $-$ ५य $-$ ६ $=$ (य $+$ १) (य $-$ २) (य $+$ ३) ।

उदा० (३) य^{४} $-$ य^{३} $-$ ४० य^{२} $+$ १०९ य $-$ २१ इस में जो खण्ड द्वियुक्पद हों उन को अलग करो ।

इस में अन्त के २१ इस पद के १, ३, ७ और २१ इतने अपवर्तन हैं इन में केवल $+$३ और $-$७ इन दो अपवर्तनों से उत्थापन करने से उद्दिष्ट पद का मान ० होता है। इस लिये य $-$ ३ और य $+$ ७ इन दोनों द्वियुक्पदों से उद्दिष्ट पद निःशेष होगा ।

$\therefore$ य^{४} $-$ य^{३} $-$ ४० य^{२} $+$ १०९ य $-$ २१ $=$ (य $-$ ३) (य $+$ ७)(य^{२} $-$ ५ य $+$ १)।

उदा० (४) य^{३} $-$ ७य^{२} $+$ ९य $-$ १२ इस में जो खण्ड द्वियुक्पद हों उन को अलग करो ।

यहां अन्त के १२ इस पद के १, २, ३, ४, ६ और १२ इतने अपवर्तन हैं इन में चाहो उस अपवर्तन से उत्थापन करो तो भी उद्दिष्ट पद का मान शून्य नहीं होता इस लिये यह बहुयुक्पद किसी द्वियुक्पद से निःशेष न होगा। और जब कि इस में मुख्य अक्षर का सब से बड़ा घात घन है इस लिये यह और भी किसी से निःशेष न होगा इस लिये यह उद्दिष्ट पद दृढ है ।

इस प्रकार की उपपत्ति ।

जब कि (य $-$ अ) (य $-$ क) $=$ य^{२} $-$ (अ $+$ क) य $+$ अक,

(य $-$ अ) (य $-$ क) (य $-$ ग) $=$ य^{३} $-$ (अ $+$ क $+$ ग) य^{२}
$+$ (अक $+$ अग $+$ कग) य $-$ अकग,

इत्यादि ।

इस में स्पष्ट दिखाई देता है कि य $-$ अ, य $-$ क इत्यादि ऐसे द्वियुक्पदों

के गुणनफल में आदि में केवल य का घात रहता है और उस का वारद्योतक १ होता है और अन्त में अ, क, ग इत्यादिओं का गुणनफल रहता है। इस लिये ऐसे बहुयुक्पद का जो य – अ ऐसा कोइ खण्ड हो तो उस पद का अकग ··· यह अन्त का पद अवश्य अ से निःशेष होगा और जो य के समान अ को मानो तो य – अ का मान शून्य होगा और तब जिस का खण्ड य – अ होगा उस बहुयुक्पद का मान भी शून्य होगा क्योंकि शून्य से चाहो उस को गुण देओ तो भी गुणनफल शून्य हि होता है इस से उक्त प्रकार की उपपत्ति स्पष्ट होती है।

इसी भांति जब कि

$$(\text{अय} - \text{क})(\text{गय} - \text{घ}) = \text{अगय}^2 - (\text{अघ} + \text{कग})\text{य} + \text{कघ},$$

इत्यादि ।

तब इस प्रकार के बहुयुक्पद का अर्थात् जिस में य के सब से बड़े घात का भी १ छोड़ और कोइ वारद्योतक हो उस बहुयुक्पद का जो अय – क ऐसा एक खण्ड हो तो अय – क = ० करने से अय = क, अर्थात् $\text{य} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}$ होगा । इस लिये जो य के समान $\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ मानो तो अय – क यह द्वियुक्पद शून्य होगा और यह जिस बहुयुक्पद का खण्ड हो वह भी अवश्य ० होगा ।

इस से यह सिद्ध होता है कि उक्त प्रकार के उद्दिष्ट बहुयुक्पद में आदि में जो वारद्योतक हो उस के सब अपवर्तन जानो और अन्त के पद के भी सब अपवर्तन ठहराओ । फिर हर एक आदि के अपवर्तन का हर एक अन्त के अपवर्तन में अलग २ भाग देने से जितनी लब्धि आवेंगी उन में जिस लब्धि को धन वा ऋण मान के वैसी लब्धि को मुख्य अक्षर के समान करके उत्थापन करने से उद्दिष्ट पद का मान शून्य होगा उस लब्धि के छेद से मुख्य अक्षर को गुण के उस गुणनफल में उस लब्धि का अंश जो लब्धि के अनुसार धन वा ऋण होगा उस को घटा देओ सो अन्तर उद्दिष्ट पद का एक खण्ड होगा ।

उदा०। $३य^३ + ४य^२ + ११य - १०$ इस बहुयुक्पद के खण्ड करो।

इस में आदि के ३ इस वारद्योतक के १ और ३ ये दो अपवर्तन हैं और अन्त के १० इस पद के १, २, ५ और १० ये चार अपवर्तन हैं। इन में आदि के ३ इस अपवर्तन का अन्त के २ इस अपवर्तन में भाग देने से जो $\frac{२}{३}$ यह लब्धि आती है इस को धन मान के वैसी को जो य के समान करके उत्थापन करो तो उद्दिष्ट बहुयुक्पद का मान शून्य होता है इस लिये उक्त प्रकार से $३य - २$ यह उद्दिष्ट पद का एक खण्ड होता है।

$$\therefore ३य^३ + ४य^२ + ११य - १० = (३य - २)(य^२ + २य + ५) ।$$

अभ्यास के लिये उदाहरण।

(१) $य^२ + ११य + ३० = (य + ५)(य + ६)$ ।

(२) $य^२ - १६य + ६३ = (य - ७)(य - ९)$ ।

(३) $य^२ + २अय - ८अ^२ = (य + ४अ)(य - २अ)$ ।

(४) $य^३ + १४य^२ + ६३य + ९० = (य + ३)(य + ५)(य + ६)$ ।

(५) $य^३ - ५य^२ - २२य + ५६ = (य - २)(य + ४)(य - ७)$ ।

(६) $य^३ - २य^२ - ११य - २० = (य - ५)(य^२ + ३य + ४)$ ।

(७) $य^३ - २८य + १५ = (य - ५)(य^२ + ५य - ३)$ ।

(८) $अ^३ + २अ^२क + ९क^३ = (अ + ३क)(अ^२ - अक + ३क^२)$ ।

(९) $अ^३ - अ^२ - १८ = (अ - ३)(अ^२ + २अ + ६)$ ।

(१०) $अ^३ + अ^२य - ५अय^२ + ३य^३ = (अ + ३य)(अ - य)^२$ ।

(११) $य^४ + २अय^३ - २५अ^२य^२ - २६अ^३य + १२०अ^४$
$= (य - २अ)(य + ३अ)(य - ४अ)(य + ५अ)$ ।

(१२) $अ^४ - १०अ^२ + ५अ + १४ = (अ + १)(अ - २)(अ^२ + अ - ७)$ ।

(१३) $य^६ - १२य^४ + ४७य^२ - ६० = (य^२ - ३)(य^२ - ४)(य^२ - ५)$ ।

(१४) $६अ^३ + १८अ^२ - ३०अ - ५६ = (अ - २)(२अ + ७)(३अ + ४)$।

४२। जो दो राशि १ छोड़ और किसी एक हि राशि से निःशेष भागे नहीं जाते उन को परस्पर दृढ कहते हैं और जो भागे जाते हैं उन को परस्पर अदृढ कहते हैं।

४३। कोइ दो राशिओं में छोटे राशि का बड़े राशि में भाग देने से जो शेष बचेगा उस का उस के भाजक में भाग देओ तब जो दूसरा शेष बचेगा उस का फिर उस के भाजक में भाग देओ। यों उन दो राशिओं का परस्पर में भाग देने से जिस शेष से उस का भाजक निःशेष होगा उस शेष से वे दोनों राशि निःशेष भागे जावेंगे और उस से भागे हुए वे दो राशि परस्पर दृढ होंगे।

मानो अ और क ये दो राशि हैं। इन में अ राशि क से बड़ा है और मानो कि अ में क का भाग देने से त लब्ध होता है और ग शेष रहता है फिर ग का क में भाग देने से थ लब्ध होता है और घ शेष रहता है। फिर भी घ का ग में भाग देने से द लब्ध होता है और शेष कुछ नहीं बचता है। इस का न्यास दिखलाते हैं।

क) अ (त
    कत
    ——
    ग) क (थ
        गथ
        ——
        घ) ग (द
            घद
            ——
            ०

तो यहां घ से अ और क ये दोनों निःशेष होवेंगे। इस की उपपत्ति इस भांति स्पष्ट होती है।

यहां, $ग - घद = ०$, $\therefore$ पक्षान्तरनयन से, $ग = घद$।

क − गथ = घ, ∴ क = घ + गथ = घ + घदथ = (१ + थद) घ ।
और अ − कत = ग, ∴ अ = ग + कत = घद + त (१ + थद) घ
= (त + तथद + द) घ ।

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि घ से अ और क ये दोनों भी निःशेष होते हैं ।

और अ और क इन को जितने राशि निःशेष करते होंगे उन सभों में घ बड़ा है ।

क्यों कि जो यों न मानो और कहो कि अ और क इन को निःशेष करनेहारों में सभों में बड़ा राशि च है और इस का अ और क में अलग भाग देने से क्रम से प और फ ये दो लब्ध होते हैं । तो

अ = पच, और क = फच होगा

∴ ग = अ − कत = पच − तफच = (प − तफ) च । और
घ = क − गथ = फच − थ (प − तफ) च = (फ − थप + तथफ) च ।

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि च से घ निःशेष होता है । तो च सब से बड़ा नहीं हो सकता । इस लिये अ और क इन को निःशेष करनेहारों में घ सब से बड़ा है यह सिद्ध हुआ । इस को अ और क का महत्तमापवर्तन कहते हैं । और इसी लिये इस से भागे हुए अ और क ये दो राशि फिर १ छोड़ किसी दूसरे एक हि राशि से निःशेष न होंगे अर्थात् वे दृढ होंगे ।

श्रीयुत भास्कराचार्यजी ने भी लीलावती और बीजगणित के कुट्टकाध्याय में कहा है कि

परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः शेषस्तयोः स्यादपवर्तनं सः ।
तेनापवर्तेन विभाजितौ यौ तौ भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः ॥

यह रेखागणित के सातवें अध्याय के दूसरे क्षेत्र में भी क्षेत्र रीति से सिद्ध किया है ।

अनुमान १। दो राशिओं का परस्पर में भाग देने से जो हर एक भागहार में भाज्य भाजक रहते हैं उन का भी महत्तमापवर्तन वही होता है जो उन दो राशिओं का महत्तमापवर्तन है ।

जैसा । ४२६ और ६१२ इन के महत्तमापवर्तन के लिये इन का परस्पर में भाग देने का न्यास ।

```
४२६) ६१२ (१
     ४२६
     ---
     १८६) ४२६ (२
          ३७२
          ---
           ५४) १८६ (३
               १६२
               ---
                २४) ५४ (२
                    ४८
                    --
                     ६) २४ (४
                        २४
                        --
                         ०
```

इस प्रकार से ४२६ और ६१२ इन का महत्तमापवर्तन ६ है। अब यहां हर एक भागहार में ४२६ और १८६, १८६ और ५४, ५४ और २४ और २४ और ६ ये जो भाज्य भाजक हैं इन का भी महत्तमापवर्तन ६ यही है।

अनुमान २। दो राशिओं को जो कोइ तीसरा राशि निःशेष करता हो वह उन दो राशिओं के महत्तमापवर्तन को भी निःशेष करेगा ।

अनुमान ३। जो दो राशि परस्पर दृढ हैं अर्थात् १ छोड़ किसी अन्य एक हि राशि से निःशेष नहीं होते उन का परस्पर में भाग देने से अन्त का भाजक १ होगा ।

४४। जो अ और क इन दो राशिओं का अक गुणनफल ग का अपवर्त्य अर्थात् ग से निःशेष होने के योग्य हो और क और ग ये दो परस्पर दृढ हों तो ग से अ निःशेष होगा ।

इस की उपपत्ति । जब कि क और ग परस्पर दृढ हैं तो इन का परस्पर में भाग देने से अन्त का भाजक अवश्य १ होगा । सो ऐसा

क) ग (त
कत
———
घ) क (थ
घथ
———
च) घ (द
चद
———
१) च (च
च
———
०

यहां, ग − कत = घ, क − घथ = च, और घ − चद = १ ।

∵ अग − अकत = अघ, अक − अघथ = अच और अघ − अचद = अ ।

अब ∵ अक यह ग से निःशेष होता है ।

∴ अघ भी ग का अपवर्त्य है,

∴ अच भी ग का अपवर्त्य है,

और ∴ ग से अ निःशेष होगा । यह सिद्ध हुआ ।

यह उपपत्ति ग को क से बड़ा मान के दिखलाई इसी भांति क को ग से बड़ा मान के भी स्पष्ट होती है ।

इस की प्रकारान्तर से उपपत्ति दिखलाते हैं ।

जब कि क और ग ये परस्पर दृढ हैं तब जो इन दोनों को अ से गुण देओ तो स्पष्ट है कि अक और अग इन दो गुणनफलों का महत्तमापवर्तन अ होगा (प्र० ४३) और अक यह ग का अपवर्त्य माना है और अग यह ग से निःशेष होता हि है। इस लिये जब कि अक और अग इन दोनों को ग निःशेष करता है तब (४३) वे प्रक्रम के दूसरे अनुमान से सिद्ध होता है कि ग यह अक और अग इन के महत्तमापवर्तन को अर्थात् अ को भी निःशेष करेगा । यों उपपन्न हुआ ।

जैसा । ५ और ६ इन का गुणनफल ३० है । यह ३ से निःशेष होता है और ५ और ३ ये परस्पर दृढ हैं तो ६ यह संख्या ३ से निःशेष होगी ।

इसी भांति जो अ² — क² यह ग से निःशेष होता है और अ — क यह ग से दृढ है तो अ + क यह अवश्य ग से निःशेष होगा । अर्थात् दो राशिओं के वर्गों का अन्तर जो किसी तीसरे राशि से निःशेष होता हो और वह तीसरा राशि उन दो राशिओं के अन्तर से दृढ हो तो उन दो राशिओं का योग अवश्य उस तीसरे राशि से निःशेष होगा ।

४५ । जो अ और क ये दो राशि प्रत्येक ग से दृढ हों तो उन का अक गुणनफल भी ग से दृढ होगा ।

क्यों कि जो ऐसा न हो अर्थात् ग और अक ये दोनों घ से निःशेष होते हों तो घ यह अ और क इन दोनों से दृढ होगा (क्यों कि ग उन दोनों से दृढ है) और घ से अक अपवर्त्य है और अ से दृढ है । इस लिये ऊपर के प्रक्रम से क यह घ से निःशेष होगा । परन्तु क तो घ से दृढ है सो क्यों कर निःशेष होगा ? इस लिये अक यह ग से दृढ नहीं सो नहीं किन्तु दृढ हि है ।

रेखागणित के सातवें अध्याय के चौवीसवें क्षेत्र में इस की उपपत्ति क्षेत्ररीति से भी दिखलाई है ।

जैसा । ६ और ८ प्रत्येक ५ से दृढ हैं तो ६ × ८ अर्थात् ४८ यह गुणनफल भी ५ से दृढ होगा ।

इसी भांति । जो अ + क और अ — क ये दोनों ग से दृढ हों तो अ² — क² यह भी ग से दृढ होगा ।

अनुमान १ । जो अ राशि क, ग, घ इत्यादि प्रत्येक राशि से दृढ हो तो वह क, ग, घ इत्यादिओं के गुणनफल से भी दृढ होगा ।

क्यों कि जब अ यह क और ग से दृढ है तो वह कग इस गुणनफल से भी दृढ होगा और जब अ यह कग और घ से दृढ है तो वह इन के कगघ गुणनफल से भी दृढ होगा । ऐसा हि आगे भी जानो ।

जैसा । १२ यह संख्या ५, ७ और ११ इन तीनों संख्याओं से दृढ़ हो तो ५ × ७ × ११ अर्थात् ३८५ यह संख्या भी १२ से दृढ़ होगी ।

अनुमान २ । जो अ यह क से दृढ़ हो तो वह $क^2$, $क^3$, $क^4$ इत्यादिकों से भी दृढ़ होगा ।

क्यों कि जब अ यह क और क से दृढ़ है तो वह उन के गुणनफल से अर्थात् $क^2$ से भी दृढ़ होगा । इसी भांति आगे भी जानो ।

जैसा । ४ यह संख्या ३ से दृढ़ है तो ९, २७, ८१ इत्यादि संख्याकों से भी ४ यह संख्या दृढ़ होगी ।

अनुमान ३ । जो अ, क, ग इत्यादि प्रत्येक त, थ, द इत्यादिकों से दृढ़ हो तो अ, क, ग इत्यादिओं का गुणनफल भी त, थ, द इत्यादिओं के गुणनफल से दृढ़ होगा ।

क्यों कि जब अ, क, ग इत्यादि प्रत्येक त, थ, द इत्यादिकों से दृढ़ हैं तो पहिले अनुमान से अकग इत्यादि यह गुणनफल भी त, थ, द इत्यादिकों से दृढ़ होगा । और इसी लिये अकग इत्यादि यह गुणनफल भी तथद इत्यादि इस गुणनफल से दृढ़ होगा ।

जैसा । ३, ४ और ५ ये तीनों संख्या ७, ११ और १३ इन तीनों संख्याओं से दृढ़ हैं तो ३ × ४ × ५ अर्थात् ६० यह संख्या ७ × ११ × १३ अर्थात् १००१ इस संख्या से दृढ़ होगी ।

अनुमान ४ । जो अ यह क से दृढ़ हो तो $अ^2$, $अ^3$, $अ^4$ इत्यादि प्रत्येक $क^2$, $क^3$, $क^4$ इत्यादिकों से दृढ़ होंगे ।

क्यों कि जब अ यह क से दृढ़ है तो (२) रे अनुमान से $अ^2$, $अ^3$ इत्यादि सब प्रत्येक क से दृढ़ होंगे । और इसी लिये $अ^2$, $अ^3$, इत्यादि सब हर एक $क^2$, $क^3$ इत्यादिकों से दृढ़ होंगे ।

जैसा । २ और ३ ये परस्पर दृढ़ हैं तो ४, ८, १६ इत्यादि संख्या भी प्रत्येक ९, २७, ८१ इत्यादि प्रत्येक संख्या से दृढ़ होगी ।

अध्याय ३ ।

इस में बीजात्मक पदों का महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य जानने के प्रकार हैं ।

१ महत्तमापवर्तन ।

४६ । जो दो वा बहुत पद जितने पदों से अपवर्त्य हैं उतने उन पदों के अपवर्तन कहलाते हैं और उन अपवर्तनों में जो सब से बड़ा है उस को उन दो वा अधिक पदों का महत्तमापवर्तन कहते हैं ।

जैसा । अकग और कगघ इन दो पदों के क, ग और कग इतने अपवर्तन हैं और इन सभों में कग सब से बड़ा है इस लिये यह उन दो पदों का महत्तमापवर्तन है ।

इसी भांति अकगर, अगयर और गयरल इन के ग, र और गर इतने अपवर्तन हैं परंतु इन में गर सभों से बड़ा है इस लिये यह महत्तमा-पवर्तन है ।

जानना चाहिये कि यहां महत्तमापवर्तन ऋण करने से भी वह अपने पदों को निःशेष कर सकता है पर सर्वदा महत्तमापवर्तन को धनात्मक हि मानते हैं ।

४७ । जो बीजात्मक केवलपदों का महत्तमापवर्तन जानना हो तो वह उन पदों को बिचार के देखने से तुरन्त ज्ञात होगा । जैसा नीचे लिखे हुए उदाहरणों में ।

उदा० (१) २४ $अय^{२}र^{३}$ और १६ $य^{३}र^{२}ल$ इन का महत्तमापवर्तन ८ $य^{२}र^{२}$, है । क्यों कि २४ $अय^{२}र^{३}$ = ८ $य^{२}र^{२}$ × ३ अर और १६ $य^{३}र^{२}ल$ = ८ $य^{२}र^{२}$ × २ यल यहां ३ अर और २ यल ये दूसरे अवयव परस्पर दृढ हैं ।

उदा० (२) १५ $अ^{३}क$, १० $अक^{२}य$ और २० $क^{३}ग$ इन का महत्तमाप-वर्तन ५ क है इस का भी कारण वही है ।

उदा० (३) ३ अक $(य - र)^३$ और अघ $(य - र)^२$ इन का महत्तमापवर्तन अ $(य - र)^२$ है ।

उदा० (४) २ $(अ + क)^२ (अ + ३ क)^२$, ३ $(अ + क) (अ + ३ क)^२$ और ५ $(अ + क)^२ (अ + ३ क)^३$ इन का महत्तमापवर्तन $(अ + क) (अ + ३ क)^२$ यह है ।

४८ । बीजात्मक दो संयुक्तपदों का महत्तमापवर्तन निकालने की रीति ।

पहिले उद्दिष्ट पदों को सुधार के लिखो फिर संभव हो तो उन दोनों में ऐसे एक हि केवलपद का निःशेष भाग देओ कि जिस से भागे हुए उद्दिष्ट पद फिर किसी एक हि केवलपद से निःशेष होने के योग्य न रहें । यों निःशेष भागे हुए उद्दिष्ट पदों को लघुपद कहो । और दोनों उद्दिष्ट पद यदि किसी एक हि केवलपद से निःशेष होने के योग्य न हों तो उद्दिष्ट पद हि लघुपद कहावें ।

फिर उन दो लघु पदों में जिस एक पद में दूसरे का भाग लग सके उस में भाग देओ तब जो शेष बचेगा उस का उस के भाजक में भाग देओ फिर भी जो शेष बचेगा उस से फिर वही विधि करो यों उन लघुपदों का परस्पर में भाग देने से जिस शेष से उस का भाजक निःशेष होगा वह उन दो लघुपदों का महत्तमापवर्तन है । अब जो उद्दिष्ट पद हि लघु हों तो उन का महत्तमापवर्तन यही होगा और जो उद्दिष्ट पद लघु न हों अर्थात् भागे हुए उद्दिष्ट पद लघु हों तो उस भाजकरूप केवलपद से उन लघुपदों के महत्तमापवर्तन को गुण देओ वह गुणनफल उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन है ।

यहां लघुपदों का महत्तमापवर्तन निकालने की जो रीति लिखी है उस की उपपत्ति (४३) वे प्रक्रम से स्पष्ट प्रकाशित होती है । अब जो उद्दिष्ट पद हि लघु हों तो जो लघुपदों का महत्तमापवर्तन है सो हि उद्दिष्ट पदों का होगा और जो भागे हुए उद्दिष्ट पद लघु हों तो

यहां लघुपदों का महत्तमापवर्तन भी भागा हुआ आवेगा इस लिये इस को उस भाजकरूप केवलपद से गुण देने से वह गुणनफल उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन होगा यह स्पष्ट है।

यहां लघुपदों का परस्पर में भाग देने में हर एक भाजक जिस पद से निःशेष भागा जाता होगा (जो पद उस भाजक के भाज्य से दृढ हो) उस का भाग दे के फिर उस भागे हुए भाजक से क्रिया को बढ़ाओ और हर एक भागहार में जो लब्धि का वारद्योतक भिन्न आने के योग्य हो तो भाज्य को ऐसे एक छोटे पद से गुण देओ कि जिस से लब्धि का वारद्योतक अभिन्न आवे और जो गुणक रूप छोटा पद भाजक से दृढ होवे फिर पूर्ववत् क्रिया करो।

इन दो विशेष विधिओं को कहने का कारण यह है कि इन से लब्धि अभिन्न आती है और इसी लिये गणित में गौरव नहीं होता और इन से महत्तमापवर्तन में कुछ अन्तर नहीं होता इस का कारण यह है।

मानो कि अघ और कघ इन का महत्तमापवर्तन घ है तो अ और क ये अवश्य परस्पर दृढ होंगे और ग एक राशि अ से दृढ हो तो अघ और कगघ इन का महत्तमापवर्तन घ ही होगा क्योंकि अ और कग ये भी दोनों (४५) वे प्रक्रम से परस्पर दृढ होंगे। इस से स्पष्ट है कि जिन दो राशिओं का महत्तमापवर्तन निकालना है उन दो राशिओं में एक राशि को जो किसी तीसरे राशि से गुण देओ वा भाग देओ जो राशि उन दो राशिओं में दूसरे राशि से दृढ हो और फिर वह गुणा हुआ वा भागा हुआ पहिला राशि और केवल दूसरा राशि इन का महत्तमापवर्तन निकालो तो भी वह उन दो राशिओं के महत्तमापवर्तन के समान हि होता है। अब इस से और (४३) वे प्रक्रम के पहिले अनुमान से विशेष विधिओं की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है।

उदा० (१) $६ य^{३} + य^{२} - ४४ य + १०$ और $२ य^{२} + य - १५$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

न्यास, $२य^{२}+य-१५)\,६य^{३}+य^{२}-४४य+१०\,(३य-१$

$६य^{३}+३य^{२}-४५य$

$\cdot\; -२य^{२}+य+१०$

$-२य^{२}-य+१५$

$\cdot\; २य-५$

फिर, $२य-५)\,२य^{२}+य-१५\,(य+३$

$२य^{२}-५य$

$\cdot\; ६य-१५$

$६य-१५$

$\cdot\;\cdot$

यहां अन्त का भाजक $२य-५$ यह है, इस लिये यह उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (२) $अ^{३}+अ^{२}क-अक^{२}+२क^{३}$ और $अ^{३}+३अ^{२}क+३अक^{२}+२क^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है ?

न्यास, $अ^{३}+अ^{२}क-अक^{२}+२क^{३})\,अ^{३}+३अ^{२}क+३अक^{२}+२क^{३}\,(१$

$अ^{३}+अ^{२}क-अक^{२}+२क^{३}$

$\cdot\; २अ^{२}क+४अक^{२}\;\cdot$

अब यह शेष भाजक होगा पर यह २ अक से निःशेष होता है और २ अक शेष रूप भाजक के भाज्य से भी दृढ़ है इस लिये शेष में २ अक का भाग देने से ।

$अ+२क)\,अ^{३}+अ^{२}क-अक^{२}+२क^{३}\,(अ^{२}-अक+क^{२}$

$अ^{३}+२अ^{२}क$

$\cdot\; -अ^{२}क-अक^{२}$

$-अ^{२}क+२अक^{२}$

$\cdot\; अक^{२}+२क^{३}$

$अक^{२}+२क^{३}$

$\cdot\;\cdot\;\cdot$

इस लिये यहां $अ + २क$ यह महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (३) $३य^३ - १०य^२ + १०य - ७$ और $२य^३ + ३य^२ - ३य + ५$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है ?

यहां उद्दिष्ट पदों में किसी एक का दूसरे में भाग देने से लब्धि भिन्न आती है । इस लिये पहिले उद्दिष्ट पद को भाज्य मान के उस को दो से गुण के क्रिया को बढाओ ।

$$३य^३ - १०य^२ + १०य - ७$$
$$२$$
$$२य^३ + ३य^२ - ३य + ५)\,६य^३ - २०य^२ + २०य - १४\,(३$$
$$६य^३ + ९य^२ - ९य + १५$$
$$\cdot \quad -२९य^२ + २९य - २९$$

शेष में -२९ का भाग देने से

$$य^२ - य + १)\,२य^३ + ३य^२ - ३य + ५\,(२य + ५$$
$$२य^३ - २य^२ + २य$$
$$\cdot \quad ५य^२ - ५य + ५$$
$$५य^२ - ५य + ५$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

इस लिये यहां महत्तमापवर्तन $य^२ - य + १$ यह है ।

उदा० (४) $१२य^५ - ४८य^४ + ३९य^३ + ९य^२$ और $६य^५ - २७य^४ + ५७य^३ - ४५य^२$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है ?

यहां दोनों उद्दिष्ट पद $३य^२$ से निःशेष होते हैं सो ऐसे

$$१२य^५ - ४८य^४ + ३९य^३ + ९य^२ = ३य^२(४य^३ - १६य^२ + १३य + ३),$$
$$६य^५ - २७य^४ + ५७य^३ - ४५य^२ = ३य^२(२य^३ - ९य^२ + १९य - १५) ।$$

$\therefore$ यहां $४य^३ - १६य^२ + १३य + ३$ और $२य^३ - ९य^२ + १९य - १५$ ये लघुपद हैं इन का परस्पर में भाग देने के लिये न्यास,

$२य^३ - ९य^२ + १९य - १५)\ ४य^३ - १६य^२ + १३य + ३\ (\ २$

$४य^३ - १८य^२ + ३८य - ३०$

$२य^२ - २५य + ३३$

फिर, $२य^२ - २५य + ३३)\ २य^३ - ९य^२ + १९य - १५\ (\ य + ८$

$२य^३ - २५य^२ + ३३य$

$१६य^२ - १४य - १५$

$१६य^२ - २००य + २६४$

$१८६य - २७९$

९३ का भाग देने से

$२य - ३)\ २य^२ - २५य + ३३\ (\ य - ११$

$२य^२ - ३य$

$-२२य + ३३$

$-२२य + ३३$

. .

इस लिये यहां $२य - ३$ यह लघुपदों का महत्तमापवर्तन है और $\therefore ३य^२(२य - ३)$ वा, $६य^३ - ९य^२$, यह उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन है।

उदा० (५) $य^३ + (अ - घ)य^२ - (अघ + क)य + कघ$ और $पय^२ - (पघ - फ)य - घफ$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है ?

न्यास । $य^३ + (अ - घ)य^२ - (अघ + क)य + कघ$

$प$

$पय^३ + (अप - घप)य^२ - (अघप + कप)य + कघप$

$पय^२ - (पघ - फ)य - घफ)\ पय^३ + (अप - घप)य^२ - (अघप + कप)य + कघप\ (\ य$

$पय^३ - (पघ - फ)य^२ - घफय$

$(अप - फ)य^२ - (अघप - घफ + कप)य + कघप$

$प$

$पय^२ - (पघ - फ)य - घफ)\ (अप^२ - पफ)य^२ - (अघप^२ - घपफ + कप^२)य + कघप^२\ (\ अप - फ$

$(अप^२ - पफ)य^२ - (अघप^२ - अपफ - घपफ + फ^२)य - अघपफ + घफ^२$

$-(अपफ + कप^२ - फ^२)य + अघपफ + कघप^२ - घफ^२$

$-(अपफ + कप^२ - फ^२)$ इस का भाग देने से

$$य - घ) \; पय^2 - (पघ - फ) \, य - घफ \; (पय + फ$$
$$\underline{पय^2 - घपय}$$
$$+ फय - घफ$$
$$\underline{+ फय - घफ}$$
$$\cdot \quad \cdot$$

∴ यहां य − घ यह महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (६) $अ^2 + ३ \, अक + २ \, क^2 - २ \, अग - कग - ३ \, ग^2$ और $३ \, अ^2 + अक - २ \, क^2 + ४ \, अग - कग + ग^2$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

यहां उद्दिष्ट पदों को सुधार के पहिले पद का दूसरे में भाग देने से

$$अ^2 + (३क - २ग) \, अ + २क^2 - कग - ३ग^2) \; ३अ^2 + (क + ४ग) \, अ - २क^2 - कग + ग^2 \; (३$$
$$\underline{३अ^2 + (९क - ६ग) \, अ + ६क^2 \;\; ३कग - ९ग^2}$$
$$-(८क - १०ग) \, अ - ८क^2 + २कग + १०ग^2$$

− (८ क − १० ग) इस का भाग देने से

$$अ + क + ग) \; अ^2 + (३क - २ग) \, अ + २ \, क^2 - कग - ३ \, ग^2 \; (अ + २ \, क - ३ \, ग$$
$$\underline{अ^2 + (\; क + \; ग) \, अ}$$
$$(२ \, क - ३ \, ग) \, अ + २ \, क^2 - कग - ३ \, ग^2$$
$$\underline{(२ \, क - ३ \, ग) \, अ + २ \, क^2 - कग - ३ \, ग^2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

∴ यहां अ + क + ग यह महत्तमापवर्तन है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $य^2 + ५ \, य + ६$ और $य^2 + ६ \, य + ८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, य + २ ।

(२) $य^2 + य - २०$ और $य^2 - ११ \, य + २८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, य − ४ ।

(३) $२य^{२} + ७य + ६$ और $य^{२} + य - २$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + २$।

(४) $य^{२} + ७य - ८$ और $य^{३} - ४य^{२} + १०य - ७$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - १$।

(५) $य^{२} - ९य + १४$ और $२य^{३} - य^{२} - ११य + १०$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - २$।

(६) $य^{२} + १३य + ३६$ और $५य^{३} + १३य^{२} - २६य + ८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + ४$।

(७) $य^{३} - ४य^{२} - २६य + ३५$ और $य^{३} - ११य^{२} + २९य - ७$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - ७$।

(८) $य^{३} + ३य^{२} - १८य$ और $३य^{३} - १३य^{२} + १७य - १५$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - ३$।

(९) $य^{३} + ९य^{२} + २५य + २५$ और $य^{३} + ८य^{२} + १८य + १५$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + ५$।

(१०) $य^{३} + २य^{२}र - ८यर^{२} + ५र^{३}$ और $य^{३} - ३य^{२}र + ५यर^{२} - ३र^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - र$।

(११) $२य^{३} - १७य^{२} + २२य - ७$ और $३य^{३} - २३य^{२} + १८य - २८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - ७$।

(१२) $अ^{३} - अक^{२} - ६क^{३}$ और $अ^{३} - ३अ^{२}क + ४क^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ - २क$ ।

(१३) $३य^{३} - २५य^{२} + ६७य - १५०$ और $२य^{३} - ७य^{२} - ४७य + १०२$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - ६$ ।

(१४) $य^{३} + अय^{२} - २७अ^{२}य + १८अ^{३}$ और $य^{३} + १३अय^{२} + ४०अ^{२}य - १२अ^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + ६अ$ ।

(१५) $य^{३} - ५य^{२} - १९२$ और $य^{३} - ५७य - ५६$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - ८$ ।

(१६) $२य^{३} + ३य^{२} - ३य - ९$ और $२य^{४} + ३य^{३} - य^{२} - ८य - ६$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $२य - ३$ ।

(१७) $६य^{३} - य^{२} - १७य + ४२$ और $९य^{३} - ४९य$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $३य + ७$ ।

(१८) $३य^{३} + १६य^{२} - ७४य + ६५$ और $६य^{३} - ३१य^{२} + ६५य - ५०$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $३य - ५$ ।

(१९) $२य^{३} - ९य^{२} - ८१य - ५२$ और $३य^{३} + १७य^{२} + २७य + २८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + ४$ ।

(२०) $१८ य^३ + ३३ य^२ - १०५ य$ और $१६ य^३ + ३२ य^२ - ८४ य$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर $२ य^२ + ७ य$ ।

(२१) $३ य^५ + ४ य^४ - ६ य^३ + २७ य^२$ और $४ य^५ + १४ य^४ + ३ य^३ - ९ य^२$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^३ + ३ य^२$ ।

(२२) $६ य^३ + २३ य^२ र + १९ य र^२ - ३ र^३$ और $२ य^३ - ३ य^२ र - ७ य र^२ + ३ र^३$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $२ य + ३ र$ ।

(२३) $य^४ + य^३ + १३ य + ५$ और $य^४ + ९ य^३ + १० य^२ - २१ य - ९$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^२ + ३ य + १$ ।

(२४) $य^४ + य^३ + १० य^२ + १३ य + ६३$ और $य^४ - ७ य^३ + २१ य^२ - ४९ य + १८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^२ - २ य + ९$ ।

(२५) $२ य^४ - ७ य^३ + ६ य^२ + १४ य + ३२३$ और $३ य^४ - १० य^३ - ८ य^२ + १२५ य + २२८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^२ - ७ य + १९$ ।

(२६) $३ य^४ + २ य^३ - १६ य^२ + २३ य + २४$ और $य^४ + ८ य^३ + १२ य^२ - १४ य - १५$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + ३$ ।

(२७) $४ य^४ + ३२ य^३ + २८ य^२ - १६० य$ और $३ य^४ + ९ य^३ - ९ य^२ + १०५ य$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^२ + ५ य$ ।

(२८) ११ य^{५} − १४ य^{४} + य + २ और ४ य^{५} − ५ य^{४} + १ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, (य − १)^{२} ।

(२९) य^{४} − ८ य^{३} + १४ य^{२} + ८ य − १५ और य^{४} + ८ य^{३} + १४ य^{२} − ८ य − १५ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, य^{२} − १ ।

(३०) २ य^{६} + य^{५} + ७ य + ६ और २ य^{६} − ३ य^{४} + १ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, (य + १)^{२} ।

(३१) अ^{४} − ६ अ^{३}क − ४ अ^{२}क^{२} + ५४ अक^{३} − ४५ क^{४} और अ^{४} + ४ अ^{३}क − २२ अ^{२}क^{२} − १०० अक^{३} − ७५ क^{४} इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, अ^{२} − २ अक − १५ क^{२} ।

(३२) १० य^{४} + २५ य^{३} − २९ य^{२} − ३५ य + २१ और १५ य^{४} − २० य^{३} − १६ य^{२} + २८ य − ७ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, ५ य^{२} − ७ ।

(३३) अ^{४} − ४ अय^{३} + ३ य^{४} और अ^{५} + अ^{४}य − ९ अय^{४} + ७ य^{५} इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, अ^{२} − २ अय + य^{२} ।

(३४) ६ य^{४}र + य^{३}र^{२} − ५ य^{२}र^{३} + १९ यर^{४} − ५ र^{५} और ८ य^{५} + ६ य^{४}र − १५ य^{३}र^{२} + यर^{४} ।

उत्तर, २ य^{२} + ३ यर − र^{२} ।

(३५) ५ अ^{५} + १३ अ^{४}क + अ^{३}क^{२} + २१ अ^{२}क^{३} और २ अ^{४}क + १० अ^{३}क^{२} + १३ अ^{२}क^{३} + ३ अक^{४} इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, अ^{२} + ३ अक ।

(३६) १५ $य^{७}$ + ३५ $य^{६}$ + २१ $य^{५}$ + १ और २५ $य^{७}$ + ५९ $य^{६}$ + ३६ $य^{५}$ − य + १ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $(य + १)^{३}$ ।

(३७) ६ $अ^{५}$ − ११ $अ^{४}य$ + १३ $अ^{३}य^{२}$ − ३७ $अ^{२}य^{३}$ + ४१ $अय^{४}$ − १२ $य^{५}$ और ९ $अ^{५}य$ + ३२ $अ^{३}य^{३}$ − १६ $अ^{२}य^{४}$ + ४३ $अय^{५}$ − २० $य^{६}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, ४ $अ^{३}$ + २ $अ^{२}य$ + ७ $अय^{२}$ − ४ $य^{३}$ ।

(३८) २ $य^{८}$ − ५ $य^{६}र^{२}$ + ३ $य^{४}र^{४}$ − $य^{३}र^{५}$ + ३ $य^{२}र^{६}$ − ८ $यर^{७}$ + ३ $र^{८}$ और ५ $य^{८}$ − ७ $य^{७}र$ + ५ $य^{६}र^{२}$ − $य^{५}र^{३}$ + ५ $य^{४}र^{४}$ − २ $य^{२}र^{६}$ + ४ $र^{८}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^{४}$ − $य^{३}र$ + $य^{२}र^{२}$ − $यर^{३}$ + $र^{४}$ ।

(३९) $अय^{३}$ + (अच − क) $य^{२}$ − (कच − ग) य + गच, और $पय^{३}$ + (पच + फ) $य^{२}$ + (फच − ब) य − बच इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, य + च ।

(४०) $अ^{३}$ − $क^{३}$ − २ अकग + $अ^{२}ग^{२}$ − २ $क^{२}ग$ − २ $कग^{२}$ − $अग^{२}$ − $ग^{३}$ और $अ^{३}$ − $अ^{२}क$ − $अक^{२}$ + $क^{३}$ − $अ^{२}ग$ − $अग^{२}$ + $क^{२}ग$ + $कग^{२}$ + $ग^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, अ − क − ग ।

४९ । जो उद्दिष्ट पदों के गुण्यगुणकरूप खण्ड शीघ्र हो सकते हों तो उन का महत्तमापवर्तन निकालने का प्रकार दूसरा ।

दोनों उद्दिष्ट पदों के अलग २ खण्ड करो तब पहिले पद के खण्डों में जितने खण्ड दूसरे पद के खण्डों में होंगे उन का गुणनफल उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन होगा ।

उदा० (१) $अ^{३}$ − २ $अ^{२}क$ + $अक^{२}$ − २ $क^{३}$ और $अ^{२}$ − ४ $क^{२}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

यहां, $अ^3 - २अ^2क + अक^2 - २क^3 = अ^2(अ - २क) + क^2(अ - २क)$

$$= (अ^2 + क^2)(अ - २क)$$

और $अ^2 - ४क^2 = (अ + २क)(अ - २क)$ ।

अब हर एक पद के खण्डों में $अ - २क$ यह खण्ड है इस लिये यह उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (२) $य^6 - र^6$ और $य^4 - र^4$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

यहां, $य^6 - र^6 = (य^3 + र^3)(य^3 - र^3)$

$$= (य + र)(य^2 - यर + र^2)(य - र)(य^2 + यर + र^2),$$

और $य^4 - र^4 = (य^2 + र^2)(य^2 - र^2) = (य^2 + र^2)(य + र)(य - र)$ ।

$\therefore$ यहां $(य + र)(य - र)$ अर्थात् $य^2 - र^2$ यह महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (३) $अ^3 + क^3$ और $अ^4 + अ^2क^2 + क^4$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

न्यास । $अ^3 + क^3 = (अ^2 - अक + क^2)(अ + क)$ और

$$अ^4 + अ^2क^2 + क^4 = अ^4 + २अ^2क^2 + क^4 - अ^2क^2$$

$$= (अ^2 + क^2)^2 - (अक)^2$$

$$= (अ^2 + अक + क^2)(अ^2 - अक + क^2)$$

$\therefore$ यहां $अ^2 - अक + क^2$ यह महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (४) $य^2 - ३यर + २र^2$ और $य^2 + यर - ६र^2$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

न्यास । $य^2 - ३यर + २र^2 = य^2 - २यर - यर + २र^2$

$$= (य^2 - २यर) - (यर - २र^2) = य(य - २र) - र(य - २र)$$

$$= (य - र)(य - २र),$$

और $य^2 + यर - ६र^2 = य^2 + ३यर - २यर - ६र^2$

$$= (य^2 + ३यर) - (२यर + ६र^2)$$

$$= य(य + ३र) - २र(य + ३र) = (य - २र)(य + ३र)$$ ।

$\therefore$ यहां $य - २र$ यह महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (५) $य^2 + (प + फ) य + पफ$ और $य^2 - (२ क - फ) य - २ कफ$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

न्यास $य^2 + (प + फ) य + पफ = य^2 + पय + फय + पफ$

$= य (य + प) + फ (य + प) = (य + फ) (य + प)$

और $य^2 - (२ क - फ) य - २ कफ = य^2 - २ कय + फय - २ कफ$

$= य (य - २ क) + फ (य - २ क) = (य + फ) (य - २ क)$ ।

∴ यहां $य + फ$ महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (६) $अ^2 + २ अक + क^2 - ग^2$ और $अ^2 - क^2 + २ अग + ग^2$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

न्यास । $अ^2 + २ अक + क^2 - ग^2 = (अ + क)^2 - ग^2$

$=(अ+क+ग)(अ+क-ग)$,

और $अ^2 - क^2 + २ अग + ग^2 = अ^2 + २ अग + ग^2 - क^2 = (अ + ग)^2 - क^2$

$= (अ + क + ग) (अ - क + ग)$ ।

∴ यहां $अ + क + ग$ यह महत्तमापवर्तन है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $अ^3 य - अ य^3$ और $अ^3 य + अ^2 य^2$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ^2 य + अ य^2$ ।

(२) $य^2 + ५ य + ६$ और $य^2 + ६ य + ८$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + २$ ।

(३) $अ^2 - ८ अक + १५ क^2$ और $अ^2 - १० अक + २१ क^2$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ - ३ क$ ।

(४) $य^2 + २ अय - ३५ अ^2$ और $य^2 - २५ अ^2$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - ५ अ$ ।

(५) $अ^{२} + ४अक + ३क^{२}$ और $अ^{३} + क^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ + क$ ।

(६) $य^{४} - य^{२} - २य - १$ और $य^{४} + य^{२} + १$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^{२} + य + १$ ।

(७) $य^{४} - १$ और $य^{३} - य^{२} - य + १$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^{२} - १$ ।

(८) $य^{३} - ३य^{२}र + यर^{२} - ३र^{३}$ और $य^{४} - र^{४}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^{२} + र^{२}$ ।

(९) $अ^{३} - २अ - ४$ और $अ^{४} + ४$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ^{२} + २अ + २$ ।

(१०) $य^{३} + ८$ और $य^{४} + ४य^{२} + १६$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^{२} - २य + ४$ ।

(११) $अ^{२} - क^{२}$ और $अ^{२} + (क + ग) अ + कग$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ + क$ ।

(१२) $य^{२} - २यर + र^{२} - ल^{२}$ और $य^{२} - र^{२} + २यल + ल^{२}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - र + ल$ ।

(१३) $अ^{२} + क^{२} - ग^{२} + २अक$ और $अ^{३} + क^{३} + ग^{३} + ३अ^{२}ग + ३अग^{२}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ + क + ग$ ।

(१४) $अ^{२} + क^{२} - ग^{२} - घ^{२} - २(अक - गघ)$ और $अ^{२} - क^{२} + ग^{२} - घ^{२} - २(अग - कघ)$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ - क - ग + घ$ ।

(१५) $प^3 + फ^3 + ब^3 + भ^3 + ३ (प^2फ + पफ^2 + ब^2भ + बभ^2)$ और $प^3 + फ^3 + ब^3 + भ^3 + ३ (प^2ब + पब^2 + फ^2भ + फभ^2)$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $प + फ + ब + भ$ ।

(१६) $य^{१६} - र^{१६}$ और $य^{१२} - र^{१२}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^४ - र^४$ ।

५० । तीन वा अधिक पदों का महत्तमापवर्तन निकालने की रीति ।

पहिले दो पदों का महत्तमापवर्तन निकालो फिर वह महत्तमापवर्तन और तीसरा पद इन का महत्तमापवर्तन जानो । ऐसा हि विधि फिर भी जितने पद होंगे उतने बेर करो फिर अन्त का जो महत्तमापवर्तन होगा सो हि उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन है ।

इस की युक्ति इस भांति स्पष्ट होती है ।

मानो कि अ, क और ग ये तीन उद्दिष्ट राशि हैं और सोचो कि अ और क इन का महत्तमापवर्तन घ है और घ और ग इन का महत्तमापवर्तन च है तो च यह अ, क और ग इन का महत्तमापवर्तन होगा ।

क्योंकि जो ऐसा न हो तर्थात् अ, क, और ग इन का महत्तमापवर्तन छ हो तो यह अ और क इन को निःशेष करनेहारा (४३) वे प्रक्रम के दूसरे अनुमान से घ को भी निःशेष करेगा और ग को निःशेष करता हि है इस लिये च को भी निःशेष करेगा और छ यह च से बड़ा माना है सो इसी को निःशेष करता है यह असंभवि है इस लिये अ, क और ग इन का महत्तमापवर्तन च ही है इस से बड़ा और दूसरा कोइ नहीं हो सकता ।

इसी भांति चार वा अधिक उद्दिष्ट पदों के महत्तमापवर्तन निकालने में भी युक्ति जानो ।

उदा० (१) $अग + कग$, $अक + क^2$ और $अ^2 - क^2$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

यहां $अग + कग$ और $अक + क^2$ इन का महत्तमापवर्तन $अ + क$ है और $अ + क$ और $अ^2 - क^2$ इन का महत्तमापवर्तन $अ + क$ है इस लिये यह उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन है ।

उदा० (२) $अ^3 - ३अ^2य - अय^2 + ३य^3$, $अ^3 - २अ^2य - ५अय^2 + ६य^3$ और $२अ^3 - ३अ^2य - ८अय^2 - ३य^3$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

न्यास । $अ^3 - ३अ^2य - अय^2 + ३य^3)\ अ^3 - २अ^2य - ५अय^2 + ६य^3\ (१$

$अ^3 - ३अ^2य - अय^2 + ३य^3$

य का भाग देने से　$अ^2य - ४अय^2 + ३य^3$

$अ^2 - ४अय + ३य^2)\ अ^3 - ३अ^2य - अय^2 + ३य^3\ (अ + य$

$अ^3 - ४अ^2य + ३अय^2$

$अ^2य - ४अय^2 + ३य^3$

$अ^2य - ४अय^2 + ३य^3$

. . .

इस लिये $अ^2 - ४अय + ३य^2$ यह पहिले दो पदों का महत्तमापवर्तन है । अब यह महत्तमापवर्तन और तीसरा पद इन का महत्तमापवर्तन निकालने के लिये न्यास ।

$अ^2 - ३अय + ४य^2)\ २अ^3 - ३अ^2य - ८अय^2 - ३य^3\ (२अ + ५य$

$२अ^3 - ८अ^2य + ६अय^2$

$५अ^2य - १४अय^2 - ३य^3$

$५अ^2य - २०अय^2 + १५य^3$

$६अय^2 - १८य^3$

$६य^2$ का भाग देने से,

$अ - ३य)\ अ^2 - ४अय + ३य^2\ (अ - य$

$अ^2 - ३अय$

$- अय + ३य^2$

$- अय + ३य^2$

. .

∴ यहां $अ - ३य$ यह उद्दिष्ट तीन पदों का महत्तमापवर्तन है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $य^{२} + य - २$, $य^{२} - १$ और $य^{२} - २य + १$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - १$ ।

(२) $य^{३} + ६य^{२} + ११य + ६$, $य^{३} + ७य^{२} + १४य + ८$ और $य^{३} + ९य^{२} + २६य + २४$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य + २$ ।

(३) $अ^{३} + २अ^{२}क + २अक^{२} + क^{३}$, $अ^{४} + अ^{२}क^{२} + क^{४}$ और $अ^{३} - क^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ^{२} + अक + क^{२}$ ।

(४) $अ^{४} - २अ^{३}क - ८अ^{२}क^{२}$, $२अ^{४} + ९अ^{३}क + १०अ^{२}क^{२}$ और $२अ^{३} + अ^{२}क - २६अक^{२} - ४०क^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ + २क$ ।

(५) $अ^{३} + क^{३}$, $अ^{५} + क^{५}$, $अ^{७} + क^{७}$ और $अ^{९} + क^{९}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ + क$ ।

(६) $६अ^{३} - ११अ^{२}य - ३अय^{२} + २य^{३}$, $२अ^{३} + ३अ^{२}य - ११अय^{२} - ६य^{३}$ और $६अ^{३} + १९अ^{२}य + २अय^{२} - य^{३}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $२अ + य$ ।

(७) $२४य^{३} - ४६य^{२} + २९य - ६$, $३०य^{३} - ५९य^{२} + ३८य - ८$ और $६०य^{३} - १५३य^{२} + ९८य - २४$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $३य - २$ ।

(८) $य^{२} - र^{२}$, $य^{३} - र^{३}$, $य^{४} - र^{४}$, $य^{५} - र^{५}$ और $य^{६} - र^{६}$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य - र$ ।

(९) $२ य^४ + ७ य^३र - १० य^२र^२ - २१ यर^३ + १२ र^४$, $य^४ + ५ य^३र + य^२र^२ - १५ यर^३ - १२ र^४$ और $२ य^४ + य^३र - ७ य^२र^२ - ३ यर^३ + ३ र^४$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $य^२ - ३ र^२$ ।

(१०) $२ अ^३ - ५ अ^२ + ५ अ - २$, $४ अ^४ - ५ अ^२ + १$ और $४ अ^४ - १२ अ^३ + ७ अ^२ + ३ अ - २$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $२ अ^२ - ३ अ + १$ ।

(११) $४ य^४ - ८ य^३र + ४ य^२र^२ - र^४$, $४ य^४ - य^२र^२ + ४ यर^३ - र^४$ और $४ य^४ + र^४$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $२ य^२ - २ यर + र^२$ ।

(१२) $अ^४ + ५ अ^३क + ५ अ^२क^२ - ५ अक^३ - ६ क^४$, $अ^४ + अ^३क - ७ अ^२क^२ - अक^३ + ६ क^४$, $अ^४ + ४ अ^३क - अ^२क^२ - १६ अक^३ - १२ क^४$ और $अ^४ + २ अ^३क - ७ अ^२क^२ - ८ अक^३ + १२ क^४$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ + ३ क$ ।

(१३) $अ^२क + अ^२ग + अक^२ + २ अकग + अग^२ + क^२ग + कग^२$, $अ^३ + २ अ^२क + २ अ^२ग + अक^२ + ३ अकग + अग^२ + क^२ग + कग^२$ और $अ^२क + अ^२ग + अक^२ + ३ अकग + २ अग^२ + क^२ग + २ कग^२ + ग^३$ इन का महत्तमापवर्तन क्या है?

उत्तर, $अ + ग$ ।

---

२ लघुतमापवर्त्य ।

५१ । जो दो वा अधिक पद जितने पदों को निःशेष करते हैं उतने पदों में जो सब से छोटा पद है उस को उन दो वा अधिक पदों का लघुतमापवर्त्य कहते हैं ।

५२ । दो पदों का लघुतमापवर्त्य निकालने की रीति ।

उद्दिष्ट दो पदों के गुणनफल में उन पदों के महत्तमापवर्तन का भाग देओ जो लब्ध होगा वही उन पदों का लघुतमापवर्त्य है ।

इस की उपपत्ति ।

यहां पहिले यह सिद्ध करना चाहिये कि दो पदों का उन के लघुतमापवर्त्य में अलग २ भाग देने से जो लब्धि आवेंगी वे परस्पर दृढ होंगी ।

जैसा । जो अ और क इन दो पदों का लघुतमापवर्त्य ल हो और ल = अप और ल = कफ हो तो प और फ ये दो लब्धि परस्पर दृढ होंगी ।

क्यों कि जो ऐसा न हो अर्थात् प और फ इन का भी साधारण अपवर्तन द हो जैसा कि प = दपे और फ = दफे तो ल = अदपे = कदफे। इस मे स्पष्ट है कि द इस साधारण अपवर्तन का जो अदपे वा कदफे इस लघुतमापवर्त्य में भाग देओ तो भजनफल अपे वा कफे (जो लघुतमापवर्त्य से अवश्य छोटा चाहिये) अ और क इन दोनों पदों का साधारण अपवर्त्य होगा । परंतु यह असंभवि है क्योंकि पदों का लघुतमापवर्त्य वही है जो उन के साधारण अपवर्त्य में सब से छोटा है तब उस से भी छोटा उन का साधारण अपवर्त्य क्यों कर होगा? इस से सिद्ध हुआ कि प और फ ये दोनो लब्धि परस्पर दृढ होंगी ।

अब मानो कि अ और क इन का महत्तमापवर्तन म है और अ = तम और क = थम तो ल = अप = तमप और ल = कफ = थमफ इस लिये तमप = थमफ वा तप = थफ होगा । अब ऊपर सिद्ध किया है कि प और फ ये परस्पर दृढ हैं और त और थ ये भी परस्पर दृढ हैं क्योंकि ये अ और क इन को इन्हीं के महत्तमापवर्तन से निःशेष करने से लब्ध हुए हैं ।

अब तप = थफ इस से स्पष्ट है कि थफ यह प से निःशेष होता है और प यह फ से दृढ है इस लिये (४४) वे प्रक्रम से थ यह प से

निःशेष होगा । इसी भांति तप यह थ से निःशेष होता है और त और थ परस्पर दृढ हैं इस लिये प भी थ से निःशेष होगा ।

अब, प और थ इन दोनों में हर एक दूसरे से निःशेष होता है इस से स्पष्ट है कि प और थ ये दोनों परस्पर समान हैं अर्थात् प = थ

इस लिये क = थम, वा क = पम वा अक = अपम, और ल = अप

$$\therefore \text{अक} = \text{लम} \quad \therefore \frac{\text{अक}}{\text{म}} = \text{ल} \text{ ।}$$

अनुमान १ । जो दो पद परस्पर दृढ हैं उन का गुणनफल उन दो पदों का लघुतमापवर्त्य है ।

अनुमान २ । दो पदों का महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य इन दोनों का गुणनफल उन दो पदों के गुणनफल के समान होता है ।

उदा० (१) २अय और ३कर इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

यहां २अय और ३कर ये परस्पर दृढ हैं इस लिये इन का महत्तमापवर्तन १ है,

$$\therefore \text{लघुतमापवर्त्य} = \frac{२\text{अय} \times ३\text{कर}}{१} = ६\text{अकयर} \text{ ।}$$

उदा० (२) ४ $\text{अय}^{२}$ और ५ $\text{अ}^{२}\text{य}$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

यहां उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन अय है ।

$$\therefore \text{लघुतमापवर्त्य} = \frac{४\text{अय}^{२} \times ५\text{अ}^{२}\text{य}}{\text{अय}} = २०\,\text{अ}^{२}\text{य}^{२} \text{ ।}$$

उदा० (३) $\text{य}^{२} - \text{र}^{२}$ और $\text{य}^{३} - \text{र}^{३}$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

यहां $\text{य}^{२} - \text{र}^{२} = (\text{य} + \text{र})\ (\text{य} - \text{र})$ और

$\text{य}^{३} - \text{र}^{३} = (\text{य}^{२} + \text{यर} + \text{र}^{२})\ (\text{य} - \text{र})$ ।

इस लिये उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन य − र है,

$\therefore$ लघुतमापवर्त्य $= \dfrac{(य+र)\,(य-र) \times (य^2+यर+र^2)\,(य-र)}{य-र}$

$= (य+र)\,(य^2+यर+र^2)\,(य-र)$

$= (य^2-र^2)\,(य^2+यर+र^2) = य^4+य^3र-यर^3-र^4$ ।

उदा० (४) $य^2-यर-६र^2$ और $य^2-२यर-८र^2$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

यहां उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन $य+२र$ है,

$\therefore$ लघुतमापवर्त्य $= \dfrac{(य^2-यर-६र^2)\,(य^2-२यर-८र^2)}{य+२र}$

$= \left(\dfrac{य^2-यर-६र^2}{य+२र}\right) \times (य^2-२यर-८र^2)$

$= (य-३र)\,(य^2-२यर-८र^2)$

$= य^3-५य^2र-२यर^2+२४र^3$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $२१अ^3क^2य$ और $२८अ^2क^3य^3$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?
उत्तर, $८४अ^3क^3य^3$ ।

(२) $२१(अ+य)$ और $१४(अ-य)$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?
उत्तर, $४२(अ^2-य^2)$ ।

(३) $१८अक^2(य-र)^2$ और $३०अ^2क(य-र)^3$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?
उत्तर, $९०अ^2क^2(य-र)^3$ ।

(४) $अ+क$ और $अ-क$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?
उत्तर, $अ^2-क^2$ ।

(५) $३य-२र$ और $६य^2+५यर-६र^2$, इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?
उत्तर, $६य^2+५यर-६र^2$ ।

(६) $२य^२+य-३$ और $३य^२-य-२$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $६य^३+७य^२-७य-६$ ।

(७) $अ^२+२अ+२$ और $अ^२-२अ+२$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अ^४+४$ ।

(८) $२य^२-यर-र^२$ और $य^२-४यर+३र^२$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $२य^३-७य^२र+२यर^२+३र^३$ ।

(९) $अ^२-४क^२$ और $अ^३-अ^२क-४क^३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अ^४+अ^३क-२अ^२क^२-४अक^३-८क^४$ ।

(१०) $३य^३-८य^२+७य-२$ और $२य^३-य^२-४य+३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $६य^४-७य^३-१०य^२+१७य-६$ ।

(११) $२य^३+३य^२-८य+३$ और $५य^३+१४य^२-य+६$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $१०य^५+१३य^४-३९य^३+२९य^२-१९य+६$ ।

(१२) $२य^३-५य^२+८य-३$ और $८य^३+१६य^२+८य-१$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $८य^५+२३य^२+४२य-२७$ ।

(१३) $४अ^४+१२अ^३+९अ^२-१६$ और $४अ^४-९अ^२+२४अ-१६$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $८अ^६+१२अ^५-२अ^४+२१अ^३+४अ^२+४८अ-६४$ ।

(१४) $य^४-य^३र+यर^३-र^४$ और $य^५+य^४र+य^३र^२+य^२र^३+यर^४+र^५$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^६-र^६$ ।

(१५) $य^{६}+२य^{५}+२य^{४}-४य^{२}-८य-८$ और $य^{६}-२य^{५}+२य^{४}-४य^{२}+८य-८$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $य^{८}-१६$ ।

५३ । तीन वा अधिक पदों का लघुतमापवर्त्य निकालने की रीति ।

पहिले उद्दिष्ट पदों में कोइ दो पदों का लघुतमापवर्त्य निकालो फिर वह लघुतमापवर्त्य और शेष पदों में से कोइ एक पद इन दोनों का लघुतमापवर्त्य जानो ऐसाहि फिर जितने शेष पद हों उतनी बेर करो तब अन्त में जो लघुतमापवर्त्य होगा वह अभीष्ट लघुतमापवर्त्य है।

इस को सिद्ध करने के लिये पहिले यह सिद्ध किया चाहिये कि जो दो राशि जिस किसी तीसरे राशि को निःशेष करते होंगे उस तीसरे राशि को उन दो राशिओं का लघुतमापवर्त्य भी निःशेष करेगा।

जैसा मानो कि अ और क ये ला को निःशेष करते हैं और इन का लघुतमापवर्त्य ल है तो ल भी ला को निःशेष करेगा ।

क्यों कि जो ऐसा न कहो तो मानो कि ला में ल का भाग देने से फ लब्ध होता है और श शेष बचता है अर्थात् ला = फल + श ।

तब पक्षान्तरनयन से, श = ला − फल ।

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि जब अ और क ये दोनों ला और ल को निःशेष करते हैं तो वे श को भी निःशेष करेंगे और श तो ल से अर्थात् अ और क इन के लघुतमापवर्त्य से छोटा माना है उस को क्यों कर निःशेष करेंगे ? इस लिये ला में ल का भाग देने से शेष कुछ न रहेगा अर्थात् ला निःशेष होगा यह सिद्ध हुआ ।

इस को रेखागणित के सातवें अध्याय के (३५) वे क्षेत्र में भी रेखाओं से सिद्ध किया है ।

अब मानो कि अ और क इन का लघुतमापवर्त्य ल है और ग और ल इन का लघुतमापवर्त्य ला है तो ला यह अ, क और ग इन का लघुतमापवर्त्य होगा ।

क्यों कि जो २ राशि अ और क इन से निःशेष होगा सो २ ल से भी निःशेष होगा । इस लिये ल और ग इन का जो लघुतमापवर्त्य है वही अ, क और ग इन का लघुतमापवर्त्य होगा ।

इसी भांति चार वा अधिक पदों का लघुतमापवर्त्य निकालने में भी युक्ति जानो ।

इस को रेखागणित के सातवे अध्याय के छत्तीसवें क्षेत्र में विस्तार से सिद्ध किया है ।

अनुमान । जो अनेक पद ऐसे हों कि उन में कोइ दो पद परस्पर अदृढ न हों उन अनेक पदों का गुणनफल उन का लघुतमापवर्त्य होगा ।

उदा० (१) अक, क^{२}ग और ग^{३} इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां पहिले दो पदों का महत्तमापवर्तन क है । इस लिये उन दो

पदों का लघुतमापवर्त्य $= \dfrac{\text{अक} \times \text{क}^{२}\text{ग}}{\text{क}} = \text{अक}^{२}\text{ग}$

अब यह लघुतमापवर्त्य और ग^{३} यह तीसरा पद इन का महत्तमापवर्तन ग है

इस लिये अभीष्ट लघुतमापवर्त्य $= \dfrac{\text{अक}^{२}\text{ग} \times \text{ग}^{३}}{\text{ग}} = \text{अक}^{२}\text{ग}^{३}$ ।

उदा० (२) $२\text{य}^{२} - ५\text{य} + २$, $२\text{य}^{२} + \text{य} - १$ और $\text{य}^{२} - \text{य} - २$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां पहिले दो पदों का महत्तमापवर्तन $२\text{य} - १$ यह है इस लिये

उन दो पदों का लघुतमापवर्त्य $= \dfrac{(२\text{य}^{२} - ५\text{य} + २)(२\text{य}^{२} + \text{य} - १)}{२\text{य} - १}$

$= २\text{य}^{३} - ३\text{य}^{२} - ३\text{य} + २$

अब $२\text{य}^{३} - ३\text{य}^{२} - ३\text{य} + २$ यह लघुतमापवर्त्य और तीसरा पद इन का महत्तमापवर्तन $\text{य}^{२} - \text{य} - २$ यह है इस लिये

अभीष्ट लघुतमापवर्त्य $= \frac{(२य^३ - ३य^२ - ३य + २)(य^२ - य - २)}{य^२ - य - २}$

$= २य^३ - ३य^२ - ३य + २$ ।

उदा० (३) $अ^२ - २अक + क^२$, $अ^२ - क^२$ और $अ^३ - क^३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां $अ^२ - २अक + क^२ = (अ - क)^२$ और $अ^२ - क^२ = (अ + क)(अ - क)$ इस लिये पहिले दो पदों का लघुतमापवर्त्य $(अ - क)^२ (अ + क)$ यह है।

और $अ^३ - क^३ = (अ^२ + अक + क^२)(अ - क)$

इस लिये अभीष्ट लघुतमापवर्त्य

$= (अ^२ + अक + क^२)(अ - क)^२ (अ + क) = अ^५ - अ^३क^२ - अ^२क^३ + क^५$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $६य^२ + य - २$, $८य^२ - ६य + १$ और $१२य^२ + ५य - २$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $२४य^३ - २य^२ - ९य + २$ ।

(२) $२अ^२ + ७अ - १५$, $४अ^२ + २१अ + ५$ और $८अ^२ - १०अ - ३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $८अ^३ + ३०अ^२ + ५३अ - १५$ ।

(३) $य^२ - र^२$, $य^३ + य^२र + यर^२ + र^३$ और $य^३ - य^२र + यर^२ - र^३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^४ - र^४$ ।

(४) $अ^२ - ३अक + २क^२$, $अ^२ - क^२$ और $अ^२ + ३अक + २क^२$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अ^४ - ५अ^२क^२ + ४क^४$ ।

(५) $य^२ + २य$, $य^३ + य^२ - ३य$ और $य^३ + ३य^२ - य - ६$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^४ + ३य^३ - य^२ - ६य$ ।

(६) $य^२ - १, य^२ - ४य + ३$ और $य^२ - ९$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^४ - १०य^२ + ९$ ।

(७) $६अ^२ - १७अ + १२, १२अ^२ - ३१अ + २०$ और $२०अ^२ - ४९अ + ३०$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है।

उत्तर, $१२०अ^४ - ६३४अ^३ + १२५३अ^२ - १०९८अ + ३६०$ ।

(८) $४अ^४ + १, ८अ^६ + ८अ^५ + ४अ^४ - २अ^२ - २अ - १$ और $८अ^६ - ८अ^५ + ४अ^४ - २अ^२ + २अ - १$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $१६अ^८ - १$ ।

(९) $य^३ - य^२ - ४य + ४, य^३ + २य^२ - य - २, य^३ + य^२ - ४य - ४$ और $य^३ - २य^२ - य + २$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^४ - ५य^२ + ४$ ।

(१०) $अ^६ + २अ^४क^२ + ४अ^२क^४ + ८क^६, अ^६ - २अ^४क^२ + ४अ^२क^४ - ८क^६, अ^६ + २अ^५क + २अ^४क^२ - ४अ^२क^४ - ८अक^५ - ८क^६$ और $अ^६ - २अ^५क + २अ^४क^२ - ४अ^२क^४ + ८अक^५ - ८क^६$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अ^८ - १६क^८$ ।

५४ । जो बहुत से पद ऐसे हों कि उन में कितने एक दो वा अधिक पद परस्पर अदृढ हों तो उन २ परस्पर अदृढ पदों को उन के २ अपवर्तन से अपवर्तित करो जिस से वे पद अन्त में ऐसे हो जावें कि उन में कोइ दो पद परस्पर अदृढ न रहें तब इन सब दृढ पदों के गुणनफल को उन अपवर्तनों से गुण देओ । वह गुणनफल उन बहुत पदों का लघुतमापवर्त्य होगा ।

जैसा । अक, $क^२ग$ और $ग^३$ इन का लघुतमापवर्त्य जानना है ।

तब अक, $क^२ग$ और $ग^३$ इन में पहिले प्रथम दो पदों को क का अपवर्तन देने से अ, कग और $ग^३$ ये पद हुए । फिर इन में दूसरे और

तीसरे पद को ग का अपवर्त देने से अ, क और $ग^2$ ये सब परस्पर दृढ़ पद हो गये । अब इन का गुणनफल $अकग^2$ है इस को क और ग इन अपवर्तनों से गुण देने से $अकग^2 \times क \times ग = अक^2ग^3$ यह गुणनफल अक, $क^2ग$ और $ग^3$ इन का लघुतमापवर्त्य है । (५३) वे प्रक्रम में पहिला उदाहरण देखो ।

इस की उपपत्ति । अन्त के सब दृढ़ पदों का गुणनफल (५३) वे प्रक्रम के अनुमान के अनुसार उन दृढ़ पदों का लघुतमापवर्त्य है । परंतु अपवर्तन देके दृढ़ किये हुए पदों का लघुतमापवर्त्य भी अपवर्तित होगा । इस लिये उस लघुतमापवर्त्य को उन अपवर्तनों से गुण देने से गुणनफल अनपवर्तित पदों का अर्थात् उद्दिष्ट पदों का लघुतमापवर्त्य होगा । यों उत्पन्न हुआ ।

अब जहां दो वा अधिक उद्दिष्ट पदों में हर एक पद के दृढ़ गुण्य-गुणकरूप अवयव तुरंत जान सकते हो वहां उन पदों का लघुतमा-पवर्त्य जानने के लिये लाघव का और अत्यन्त सुगम यह नीचे लिखा हुआ प्रकार ऊपर की उपपत्ति के आश्रय से उत्पन्न होता है ।

उद्दिष्ट पदों को एक पंक्ति में लिखो फिर उस में जिस किसी दृढ़ पद से अनेक पद अपवर्त्य हों उस भाजकरूप दृढ़ पद को पंक्ति के भाजकस्थान में लिख के उस से जितने उद्दिष्ट पद निःशेष होंगे उतने पदों की लब्धिओं को उन २ पदों के नीचे लिख देओ और जो पद निःशेष न होंगे उन को अपने २ नीचे लिख देओ । इस से एक दूसरी पंक्ति उत्पन्न होगी फिर इस का पूर्ववत् एक दृढ़ पद भाजक कर के तीसरी पंक्ति उत्पन्न करो । और ऐसा फिर २ तब तक करो जब तक किसी दृढ़ पद से पंक्ति में अनेक पद निःशेष होने के योग्य न रहें तब सब भाजक और अन्त के पंक्ति में जो पद बचे हों उन सभों का गुण-नफल सिद्ध करो । वह गुणनफल उद्दिष्ट पदों का लघुतमापवर्त्य होगा ।

उदा० (१) १५ अ, १८ अ, और २० $अ^2$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

न्यास ।	२)	१५ अ	१८ अ	२० अ^{२}
	३)	१५ अ	९ अ	१० अ^{२}
	५)	५ अ	३ अ	१० अ^{२}
	अ)	अ	३ अ	२ अ^{२}
		१	३	२ अ

∴ २ × ३ × ५ × अ × ३ × २ अ = १८० अ^{२} यह अभीष्ट लघुतमापवर्त्य है।

उदा० (२) ३ य^{२} + ३ यर, ३ य^{२} − ३ यर, ३ य^{२} − ३ र^{२} और य^{३} − यर^{२} इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

न्यास ।	३)	३ य^{२} + ३ यर,	३ य^{२} − ३ यर,	३ य^{२} − ३ र^{२},	य^{३} − यर^{२},
	य)	य^{२} + यर,	य^{२} − यर,	य^{२} − र^{२},	य^{३} − यर^{२},
	य + र)	य + र,	य − र,	य^{२} − र^{२},	य^{२} − र^{२},
	य − र)	१,	य − र,	य − र,	य − र,
		१,	१,	१,	१,

∴ ३ × य × (य + र) × (य − र) = ३ य^{३} − ३ यर^{२}, यह उद्दिष्ट पदों को लघुतमापवर्त्य है।

अथवा इस में हर एक पंक्ति में जो २ पद किसी और पद से निःशेष होता हो उस २ निःशेष करनेहारे पद के नीचे एक रेखा करो और उस को छेंका हुआ समझो। फिर शेष पदों में आगे उक्त प्रकार से क्रिया कर के लघुतमापवर्त्य निकालो। वही अभीष्ट लघुतमापवर्त्य होगा। इस से क्रिया में बहुत लाघव होगा। जैसा ऊपर के उदाहरण में।

३)	३ य^{२} + ३ यर,	३ य^{२} − ३ यर,	३ य^{२} − ३ र^{२},	य^{३} − यर^{२},
य)	य^{२} + यर,	य^{२} − यर,	<u>य^{२} − र^{२}</u>,	य^{३} − यर^{२},
	<u>य + र</u>	<u>य − र</u>		य^{२} − र^{२}

∴ ३ × य × (य^{२} − र^{२}) = ३ य^{३} − ३ यर^{२} यह लघुतमापवर्त्य है।

८

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) अय + अर और अय − अर इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अय^२ − अर^२$ ।

(२) $अ^३ + य^३$ और $(अ + य)^२$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अ^४ + अ^३य + अय^३ + य^४$ ।

(३) २अक, २अय − २अर, २कय − २कर और अकय − अकर इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, २अकय − २अकर ।

(४) ६अ, ३अक, अक(य − र) और ३क$(य^२ − र^२)$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, ६अक$(य^२ − र^२)$ ।

(५) $अ^२य + अय^२$, $अ^२य − अय^२$, $अ^३ − अय^२$ और $अ^२य − य^३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अ^३य − अय^३$ ।

(६) $य^२ − ९$, $य^२ + ८य + १५$ और $य^२ + २य − १५$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^३ + ५य^२ − ९य − ४५$ ।

(७) $य^२ − ४$, $य^२ − ३६$ और $य^२ + ४य − १२$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^४ − ४०य^२ + १४४$ ।

(८) अ − क, $अ^२ − क^२$ और $अ^३ − क^३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $अ^४ + अ^३क − अक^३ − क^४$ ।

(९) $य^२ − र^२$, $(य − र)^२$ और $य^३ − र^३$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है?

उत्तर, $य^५ − य^३र^२ − य^२र^३ + र^५$ ।

(१०) $य^{२} + ३य + २$, $य^{२} + ४य + ३$ और $य^{२} + ५य + ६$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $य^{३} + ६य^{२} + ११य + ६$ ।

(११) $अ^{२} - क^{२}$, $अ^{३} + क^{३}$ और $अ^{४} - क^{४}$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $अ^{६} - अ^{५}क + अ^{४}क^{२} - अ^{२}क^{४} + अक^{५} - क^{६}$ ।

(१२) $(अ - क)(अ - ग)$, $(अ - क)(क - ग)$ और $(अ - ग)(क - ग)$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $(अ - क)(अ - ग)(क - ग)$ ।

(१३) $३अ^{२} - ३$, $४अ^{३} + ४$ और $५अ^{४} + ५अ^{२} + ५$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $६०अ^{६} - ६०$ ।

(१४) $(य + अ)(य + क)(य + ग)$, $(य + अ)(य + क)(य + घ)$, $(य + अ)(य + ग)(य + घ)$ और $(य + क)(य + ग)(य + घ)$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $(य + अ)(य + क)(य + ग)(य + घ)$ ।

(१५) $अ + १$, $अ^{२} - १$, $अ^{३} - १$ और $अ^{४} - १$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $अ^{६} + अ^{५} + अ^{४} - अ^{२} - अ - १$ ।

(१६) $य + र$, $य^{२} - र^{२}$, $य^{३} + र^{३}$, $य^{४} - र^{४}$ और $य^{५} + र^{५}$ इन का लघुतमापवर्त्य क्या है ?

उत्तर, $य^{१०} - २य^{९}र + ३य^{८}र^{२} - ३य^{७}र^{३} + २य^{६}र^{४} - २य^{४}र^{६} + ३य^{३}र^{७} - ३य^{२}र^{८} + २यर^{९} - र^{१०}$ ।

महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य के साधारण प्रश्न ।

(१) जिन दो पदों का गुणनफल $य^४ + ८ य^३ + २३ य^२ + २८ य + १२$ यह है और महत्तमापवर्तन $य + २$ है उन दो पदों का लघुतमापवर्त्य क्या होगा ?

यहां (५२) वे प्रक्रम के अनुसार ।

$$\frac{य^४ + ८ य^३ + २३ य^२ + २८ य + १२}{य + २} = य^३ + ६ य^२ + ११ य + ६$$

इस लिये $य^३ + ६ य^२ + ११ य + ६$ यह उन दो पदों का लघुतमापवर्त्य है ।

(२) जिन दो पदों का महत्तमापवर्तन $य + र$ और लघुतमापवर्त्य $य^३ + य^२र - यर^२ - र^३$ है और उन दो पदों में एक पद $य^२ - र^२$ है तब दूसरा पद क्या है ?

यहां (५२) वे प्रक्रम के दूसरे अनुमान से महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य इन दोनों का गुणनफल $= (य + र)(य^३ + य^२र - यर^२ - र^३)$

$$= य^४ + २ य^३र - २ यर^३ - र^४$$

यह उन दो पदों का गुणनफल है ।

$$\therefore \frac{य^४ + २ य^३र - २ यर^३ - र^४}{य^२ - र^२} = य^२ + २ यर + र^२$$ यह दूसरा पद है ।

अध्याय ४ ।

इस में बीजात्मक भिन्नपद का व्युत्पादन, भिन्नपदों का रूपभेद, उन का संकलन और व्यवकलन, गुणन, भागहार, घातक्रिया, मूलक्रिया और प्रकीर्णक इतने प्रकरण हैं ।

---

१ बीजात्मक भिन्नपद का व्युत्पादन ।

५५ । जो बीजात्मक पद पूरा नहीं है अर्थात् जो अवयव वा अवयव से मिला हुआ कोई पूर्ण पद है उस को भिन्नपद कहते हैं । इस से स्पष्ट है कि भिन्नपद कोई पूर्ण भाज्य भाजकों का भजनफल है जो भाज्य भाजक से निःशेष नहीं होता ।

भिन्नपदसम्बन्धि भाज्य को अंश वा भाग कहते हैं और भाजक को छेद वा हर कहते हैं ।

भिन्नपद जिस पदार्थ की जात का होगा उस पदार्थ के उतने समान विभाग करो कि जितनी छेद की संख्या हो फिर अंश की संख्या जितनी होगी उतने वे विभाग ले के उन का योग करो वह उस भिन्नपद का मान है अथवा अंश की संख्या जितनी होगी उतने भिन्नपद की जात के पदार्थों का ऐक्य कर के छेद की संख्या जितनी होगी उतने उस ऐक्य के समान विभाग करो उन में एक विभाग उस भिन्नपद का मान है ।

५६ । जिस भिन्नपद में अंश और छेद परस्पर दृढ हैं वह उस का लघुतम रूप है ।

५७ । जो अभिन्नपद किसी भिन्नपद से जुडा हुआ वा घटा हुआ है उस को मिश्रपद कहते हैं । यह दो प्रकार का होता है । एक भागानुबन्ध और एक भागापवाह ।

(१) जो अभिन्नपद भिन्नपद से जुड़ा हुआ है उस को भागानुबन्ध कहते हैं । जैसा, $अ + \frac{क}{ग}$ ।

(२) जो अभिन्नपद भिन्नपद से घटा हुआ है उस को भागापवाह कहते हैं । जैसा, $अ - \frac{क}{ग}$ ।

५८ । मानो कि $\frac{अ}{क}$ इस भिन्नपद का द्योतक य है अर्थात् $य = \frac{अ}{क}$ तो (१८) वे प्रक्रम के दूसरी प्रत्यक्ष बात के अनुसार दोनों पक्षों को क से गुण देने से $कय = अ$

और भी इन दोनों पक्षों को म से गुण देने से

$$मकय = मअ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (आ)$$

(१). अब (आ) इस के दोनों पक्षों में क का भाग देने से,

$$मय = \frac{मअ}{क} \text{ अर्थात् } म \times \frac{अ}{क} = \frac{मअ}{क} \text{ ।}$$

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि जो किसी अभिन्नपद से भिन्नपद के अंश को मात्र गुण देओ और छेद को वैसा हि बना रहने देओ तो वह उस भिन्नपद और अभिन्नपद का गुणनफल होगा ।

(२) (आ) इस के दोनों पक्षों में मक का भाग देने से

$$य = \frac{मअ}{मक}, \text{ अर्थात् } \frac{अ}{क} = \frac{मअ}{मक}$$

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि किसी भिन्नपद का अंश और छेद इन दोनों को किसी एक हि पद से गुण के बढ़ा देने से वा भाग देके छोटा करने से उस भिन्नपद का मोल बिगड़ता नहीं ।

५९ । और भी जब कि $अ = \frac{अ}{१} = \frac{२अ}{२} = \frac{३अ}{३} = \frac{मअ}{म} = \frac{-मअ}{-म}$

तो इस से स्पष्ट है कि कोइ अभिन्नपद भिन्नपद के रूप का हो सकता है, और किसी भिन्नपद का अंश और छेद इन दोनों के चिह्नों को पलट देने से उस भिन्नपद का मोल नहीं बिगड़ता ।

२ भिन्नपदों का रूपभेद ।

९० । भिन्नपद को एक रूप से वा नाम से दूसरे रूप वा नाम में ले जाने के प्रकार को रूपभेद कहते हैं । भिन्नपदों का संकलन, व्यवकलन, इत्यादि के लिये पहिले इस को अवश्य जानना चाहिये ।

९१ । किसी भिन्नपद का लघुतमरूप जानने का प्रकार ।

उद्दिष्ट पद का अंश और छेद इन दोनों का महत्तमापवर्त्तन निकालो तब अभीष्टरूप के अंश के लिये उद्दिष्ट पद के अंश में इस महत्तमापवर्तन का भाग देओ और अभीष्टरूप के छेद के लिये उद्दिष्ट पद के छेद में भाग देओ ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि भिन्नपद का अंश और छेद इन दोनों में एक हि पद का भाग देने से उस का मोल नहीं बिगड़ता तब उद्दिष्ट भिन्नपद का अंश और छेद इन दोनों में उन्हीं के महत्तमापवर्तन का भाग देने से उद्दिष्ट पद का मोल न पलट के उस के अंश और छेद परस्पर दृढ़ होंगे अर्थात् वे और छोटे नहीं हो सकेंगे इस लिये वह उद्दिष्ट भिन्नपद का अभीष्ट रूप होगा ।

उदा० (१) $\frac{\text{अ}^2 - \text{क}^2}{\text{अ}^3 - \text{क}^3}$ इस का लघुतमरूप क्या है?

न्यास । जब कि $\frac{\text{अ}^2 - \text{क}^2}{\text{अ}^3 - \text{क}^3} = \frac{(\text{अ} + \text{क})(\text{अ} - \text{क})}{(\text{अ}^2 + \text{अक} + \text{क}^2)(\text{अ} - \text{क})}$

इस लिये यहां अंश और छेद इन का महत्तमापवर्तन अ − क है इस का उन दोनों में भाग देने से $\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{अ}^2 + \text{अक} + \text{क}^2}$ यह लघुतमरूप है।

उदा० (२) $\frac{१४\,\text{य}^2 - ११\,\text{यर} + २\,\text{र}^2}{७\,\text{य}^2 + १९\,\text{यर} - ६\,\text{र}^2}$ इस का लघुतमरूप क्या है?

यहां अंश और छेद का महत्तमापवर्तन ७य − २र है,

$$\therefore \frac{१४य^२ - ११यर + २र^२}{७य^२ + १९यर - ६र^२} = \frac{(१४य^२ - ११यर + २र^२) \div (७य - २र)}{(७य^२ + १९यर - ६र^२) \div (७य - २र)}$$

$$= \frac{२य - र}{य + ३र}$$ यह लघुतमरूप है।

उदा० (३) $\frac{अ^२ + २अक + क^२ - ग^२}{अ^२ - अक - २क^२ - ३कग - ग^२}$ इस का लघुतमरूप क्या है?

यहां अंश और छेद का महत्तमापवर्तन अ + क + ग है,

$$\therefore \frac{अ^२ + २अक + क^२ - ग^२}{अ^२ - अक - २क^२ - ३कग - ग^२} = \frac{अ + क - ग}{अ - २क - ग}$$ यह लघुतमरूप है।

यह स्मरण रक्खो कि इस के अनन्तर जहां भिन्न पद से गणित करना होगा वहां उस के स्थान में उस का लघुतमरूप लेओ और गणित में जो अन्त में फल उत्पन्न होगा उस को लघुतमरूप देओ। क्यों कि लाघव सर्वत्र अपेक्षित है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $\frac{३६ अ^३य^२}{४५ अ^२य^३} = \frac{४ अ}{५ य}$ ।

(२) $\frac{९१ (अ - क)^२}{७७ (अ - क)^३} = \frac{१३}{११ (अ - क)}$ ।

(३) $\frac{(अ + क)^३}{अ^३ + क^३} = \frac{अ^२ + २अक + क^२}{अ^२ - अक + क^२}$ ।

(४) $\frac{अ^३ - अय^२}{(अ - य)^२} = \frac{अ (अ + य)}{अ - य}$ ।

(५) $\frac{य^२ - ४य + ४}{य^२ - ४} = \frac{य - २}{य + २}$ ।

(६) $\frac{अ^२ - २अ - १५}{अ^२ + २अ - ३५} = \frac{अ + ३}{अ + ७}$ ।

(७) $\frac{य^२ + ४यर + ३र^२}{२य^२ + यर - र^२} = \frac{य + ३र}{२य - र}$ ।

(८) $\frac{१२य^३र - य^२र - ३५यर}{२८यर - ४९र} = \frac{३य^२ + ५य}{७}$ ।

(९) $\frac{अ^२य^२ - क^२र^२}{अ^३य^३ - क^३र^३} = \frac{अय + कर}{अ^२य^२ + अकयर + क^२र^२}$ ।

(१०) $\frac{य^३ - ३य + २}{२य^३ - ३य^२ + १} = \frac{य + २}{२य + १}$ ।

(११) $\frac{य^४ - र^४}{य^४ + य^२र^२} = \frac{य^२ - र^२}{य^२}$ ।

(१२) $\frac{अ^४ + अ^२क^२ + क^४}{अ^३ + क^३} = \frac{अ^२ + अक + क^२}{अ + क}$ ।

(१३) $\frac{३य^३ - ११य^२ + १२य - ४}{२य^३ - य^२ - य - १०} = \frac{३य^२ - ५य + २}{२य^२ + ३य + ५}$ ।

(१४) $\frac{१५अ^३ + ३अ^२क - १०अक^२ - २क^३}{३५अ^२ + २२अक + ३क^२} = \frac{३अ^२ - २क^२}{७अ + ३क}$ ।

(१५) $\frac{अ^३ - य^३}{अ^३ + २अ^२य + २अय^२ + य^३} = \frac{अ - य}{अ + य}$ ।

(१६) $\frac{य^४ + ४}{य^३ - २य - ४} = \frac{य^२ - २य + २}{य - २}$ ।

(१७) $\frac{य^४ - य^३र + २य^२र^२ - यर^३ + र^४}{य^४ + य^३र + २य^२र^२ + यर^३ + र^४} = \frac{य^२ - यर + र^२}{य^२ + यर + र^२}$ ।

(१८) $\frac{९य^४ + २य^२ + १}{९य^४ - ४य^२ + ४य - १} = \frac{३य^२ + २य + १}{३य^२ + २य - १}$ ।

(१९) $\frac{६य^३ - ४य^२र - १५यर^२ + १०र^३}{४य^३ + ६य^२र - १०यर^२ - १५र^३} = \frac{३य - २र}{२य + ३र}$ ।

(२०) $\frac{य^२ + (अ - ग)य - अग}{य^२ + (क - ग)य - कग} = \frac{य + अ}{य + क}$ ।

(२१) $\frac{य^२ + र^२ - ल^२ + २यर}{य^२ - र^२ - ल^२ + २रल} = \frac{य + र + ल}{य - र + ल}$ ।

(२२) $\frac{अ^३ + अ^२क + अक^२ - क^२ग - कग^२ - ग^३}{अ^३ - क^३ + २अ^२ग + अकग + २अग^२ + ग^३} = \frac{अ - ग}{अ - क + ग}$ ।

(२३) $\frac{तय^३ + (अत + द)य^२र + (अद + कत)यर^२ + कदर^३}{अय^३ + (अ^२ - ब)य^२र - (अब - अक)यर^२ - बकर^२} = \frac{तय + दर}{अय - बर}$ ।

६२ । मिश्रपद को भिन्नपद का रूप देने का प्रकार ।

भागानुबन्ध वा भागापवाह के भिन्नपद का छेद और अभिन्नपद इन के गुणनफल में भिन्नपद के अंश को क्रम से जोड़ वा घटा देने से जो बनेगा सो अभीष्ट भिन्नपद का अंश होगा और मिश्रपद में जो भिन्नपद का छेद हो वही अभीष्ट भिन्नपद का छेद होगा ।

इस की उपपत्ति ।

मानो कि $अ \pm \frac{क}{ग}$ इस मिश्रपद का द्योतक य है अर्थात् $य = अ \pm \frac{क}{ग}$ तो समों को सम से गुण देने से, $गय = अग \pm क$

$\therefore य = \frac{अग \pm क}{ग}$, वा, $अ \pm \frac{क}{ग} = \frac{अग \pm क}{ग}$ यों उपपन्न होता है ।

उदा० (१) $अ^२ - अक + \frac{अक^२}{अ + क}$ इस को भिन्नपद का रूप देओ ।

न्यास । $अ^२ - अक + \frac{अक^२}{अ + क} = \frac{(अ^२ - अक)(अ + क) + अक^२}{अ + क}$

$= \frac{अ(अ - क)(अ + क) + अक^२}{अ + क} = \frac{अ(अ^२ - क^२) + अक^२}{अ + क}$

$$= \frac{अ^3 - अक^2 + अक^2}{अ + क} = \frac{अ^3}{अ + क} ।$$

उदा० (२) $अ - \frac{अक^2 - क^3}{अ^2 + क^2}$ इस को भिन्नपद का रूप देओ ।

न्यास । $अ - \frac{अक^2 - क^3}{अ^2 + क^2} = \frac{अ(अ^2 + क^2) - (अक^2 - क^3)}{अ^2 + क^2},$

$$= \frac{अ^3 + अक^2 - अक^2 + क^3}{अ^2 + क^2} = \frac{अ^3 + क^3}{अ^2 + क^2} ।$$

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $अ - \frac{क^2}{अ} = \frac{(अ + क)(अ - क)}{अ} ।$

(२) $अ + क + \frac{२ क^2}{अ - क} = \frac{अ^2 + क^2}{अ - क} ।$

(३) $य - अ + \frac{अ^2}{य + अ} = \frac{य^2}{य + अ} ।$

(४) $३ य - ४ + \frac{य + ५}{२ य + ७} = \frac{६ य^2 + १४ य - २३}{२ य + ७} ।$

(५) $य + २ र + \frac{यर + ६ र^2}{य - ३ र} = \frac{य^2}{य - ३ र} ।$

(६) $य - २ + \frac{३}{य + २} = \frac{य^2 - १}{य + २} ।$

(७) $२ अ + ७ क - \frac{अक + १४ क^2}{३ अ + २ क} = \frac{६ अ (अ + ४ क)}{३ अ + २ क} ।$

(८) $अ + २ क - \frac{क^2 (अ - ६ क)}{अ^2 - ३ क^2} = \frac{अ^3 + २ अ^2 क - ४ अक^2}{अ^2 - ३ क^2} ।$

(९) $य^२ + यर + र^२ + \frac{र^३}{य - र} = \frac{य^३}{य - र}$ ।

(१०) $य^२ + \frac{र^४}{य^२ + र^२} = \frac{(य^२ + यर + र^२)(य^२ - यर + र^२)}{य^२ + र^२}$ ।

(११) $अ^२ + अक - क^२ + \frac{२ अक^२}{अ - क} = \frac{अ^३ + क^३}{अ - क}$ ।

(१२) $य + र - ल - \frac{र^२ - ल^२}{य + र + ल} = \frac{य(य + २र)}{य + र + ल}$ ।

(१३) $१ + अ + अ^२ + \frac{अ^३}{१ - अ} = \frac{१}{१ - अ}$ ।

(१४) $अ^२ - ३ अय - य^२ + \frac{य^३(७ अ + ३ य)}{अ^२ - २ अय + ३ य^२}$

$$= \frac{अ^२(अ^२ - ५ अय + ८ य^२)}{अ^२ - २ अय + ३ य^२}$$ ।

(१५) $अ(य + र) + क + \frac{अर^२ + कर + ग}{य - र} = \frac{अय^२ + कय + ग}{य - र}$ ।

(१६) $१ + \frac{क(२ अ + क)}{अ^२ - ग^२} = \frac{(अ + क + ग)(अ + क - ग)}{अ^२ - ग^२}$ ।

(१७) $\frac{७ य^२}{३ य - २ र} - २ य + ३ र = \frac{य^२ + १३ यर - ६ र^२}{३ य - २ र}$ ।

(१८) $य + र + प - \frac{र^२ + पर + फ}{य + र} = \frac{य^२ + (२ र + प) य - फ}{य + र}$ ।

(१९) $अग - \frac{(अ^२ - क^२ + ग^२)^२}{४ अग}$

$$= \frac{(अ + क + ग)(अ + क - ग)(अ + ग - क)(क + ग - अ)}{४ अग}$$ ।

(२०) $यर + लव - \frac{(य^2 + र^2 - ल^2 - व^2)^2}{४(यर + लव)}$

$$= \frac{(य+र+ल-व)(य+र+व-ल)(य+ल+व-र)(र+ल+व-य)}{४(यर+लव)}$$

६३ । भिन्नपद को मिश्रपद का रूप देने का प्रकार ।

भिन्नपद को मिश्रपद का रूप देने के लिये केवल भिन्नपद के अंश में उस के छेद का भाग देओ जो लब्धि आवेगी वह अभीष्ट रूप है।

उदा॰ (१) $\frac{१५\,अय}{८}$ इस को मिश्रपद का रूप देओ ।

न्यास । $\frac{१५\,अय}{८} = अय + \frac{७\,अय}{८}$ यह मिश्रपद है ।

उदा॰ (२) $\frac{५य^2 - ३यर - १२र^2}{५य + २र}$ इस को मिश्रपद का रूप देओ ।

न्यास । $५य + २र)\ ५य^2 - ३यर - १२र^2\ (य - र$

$$\begin{array}{r} ५य^2 + २यर \\ \hline -५यर - १२र^2 \\ -५यर - \ \ २र^2 \\ \hline -१०र^2 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore य - र - \frac{१०र^2}{५य + २र}$ यह मिश्रपद है ।

उदा॰ (३) $\frac{(अ - क + ग)\,य}{अ}$ इस को मिश्रपद का रूप देओ ।

न्यास । $\frac{(अ - क + ग)\,य}{अ} = य - \frac{(क - ग)\,य}{अ}$ यह मिश्रपद है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $$\frac{७\text{अ} + २०}{७} = \text{अ} + २\frac{६}{७} \text{ ।}$$

(२) $$\frac{३५\,\text{अ}^२ + १४\,\text{अय} + ४\,\text{य}^२}{७\,\text{अ}} = ५\,\text{अ} + २\,\text{य} + \frac{४\,\text{य}^२}{७\,\text{अ}} \text{ ।}$$

(३) $$\frac{५\,\text{य}^२ - १०\,\text{यर} + ३\,\text{र}^२}{५\,\text{य}} = \text{य} - २\,\text{र} + \frac{३\,\text{र}^२}{५\,\text{य}} \text{ ।}$$

(४) $$\frac{\text{अ}^५}{\text{अ}^२ + \text{क}} = \text{अ}^३ - \text{अक} + \frac{\text{अक}^२}{\text{अ}^२ + \text{क}} \text{ ।}$$

(५) $$\frac{\text{अ}^३}{\text{अ} + \text{य}} = \text{अ}^२ - \text{अय} + \text{य}^२ - \frac{\text{य}^३}{\text{अ} + \text{य}} \text{ ।}$$

(६) $$\frac{\text{अ}^४ + \text{क}^४}{\text{अ} + \text{क}} = \text{अ}^३ - \text{अ}^२\text{क} + \text{अक}^२ - \text{क}^३ + \frac{२\,\text{क}^४}{\text{अ} + \text{क}} \text{ ।}$$

(७) $$\frac{\text{य}^४}{\text{य}^२ + \text{र}^२} = \text{य}^२ - \text{र}^२ + \frac{\text{र}^४}{\text{य}^२ + \text{र}^२} \text{ ।}$$

(८) $$\frac{\text{अ}^३ - \text{य}}{\text{अ} - \text{य}} = \text{अ}^२ + \text{अय} + \text{य}^२ + \frac{\text{य}\,(\text{य} + १)\,(\text{य} - १)}{\text{अ} - \text{य}} \text{ ।}$$

(९) $$\frac{\text{य}^३ + ५\,\text{य}^२\text{र} - ७\,\text{यर}^२ - २\,\text{र}^३}{\text{य}^२ - ३\,\text{र}^२} = \text{य} + ५\,\text{र} - \frac{\text{र}^२\,(४\,\text{य} - १३\,\text{र})}{\text{य}^२ - ३\,\text{र}^२} \text{ ।}$$

(१०) $$\frac{६\,\text{य}^३ - २१\,\text{य}^२\text{र} + ८\,\text{यर}^२ - ३२\,\text{र}^३}{३\,\text{य}^२ + ५\,\text{र}^२} = २\,\text{य} - ७\,\text{र} - \frac{\text{र}^२\,(२\,\text{य} - ३\,\text{र})}{३\,\text{य}^२ + ५\,\text{र}^२} \text{ ।}$$

(११) $$\frac{\text{य}^४ - ७\,\text{य}^३\text{र} + ८\,\text{य}^२\text{र}^२ - ९\,\text{यर}^३ + ५\,\text{र}^४}{\text{य}^२ + ३\,\text{यर} + २\,\text{र}^२} = \text{य}^२ - १०\,\text{यर} + ३६\,\text{र}^२$$
$$- \frac{\text{र}^३\,(९७\,\text{य} + ६७\,\text{र})}{\text{य}^२ + ३\,\text{यर} + २\,\text{र}^२} \text{ ।}$$

(१२) $\frac{अ^{५} + अ^{३}क - अक^{३} + क^{५}}{अ^{२} + क^{२}} = अ^{२} + अक - अक^{२}$

$- \frac{क^{३}(२\,अ - अक - क^{२})}{अ^{२} + क^{२}}$ ।

(१३) $\frac{अ^{६}}{(अ + १)^{२}} = अ^{४} - २\,अ^{३} + ३\,अ^{२} - ४\,अ + ५ - \frac{६\,अ + ५}{(अ + १)^{२}}$ ।

(१४) $\frac{(अ + क)^{३}}{(अ - क)^{२}} = अ + ५\,क + \frac{४\,क^{२}(३\,अ - क)}{(अ - क)^{२}}$ ।

(१५) $\frac{अ^{५} - र^{५}}{अ^{३} + र^{३}} = अ^{२} - \frac{र^{३}(अ^{२} + र^{२})}{अ^{३} + र^{३}}$ ।

(१६) $\frac{अ^{८} + क^{८}}{अ^{३} + क^{३}} = अ^{५} - अ^{२}क^{३} + \frac{क^{६}(अ^{२} + क^{२})}{अ^{३} + क^{३}}$ ।

(१७) $\frac{अ^{२} - २\,अक + क^{२} - अग - ग^{२}}{अ - क + ग} = अ - क - २\,ग - \frac{ग\,(क - ग)}{अ - क + ग}$

(१८) $\frac{अय^{४} + कय^{३} + गय^{२} + घय + च}{य - प} = अय^{३} + (अप + क)\,य^{२}$

$+ (अप^{२} + कप + ग)\,य + (अप^{३} + कप^{२} + गप + घ) + \frac{अप^{४} + कप^{३} + गप^{२} + घप + च}{य - प}$ ।

३ भिन्नपदों का संकलन और व्यवकलन ।

६४ । भिन्नपदों का संकलन वा व्यवकलन करने के लिये पहिले उन पदों के छेदों को समान करना चाहिये उस का प्रकार यह है ।

उद्दिष्ट पदों के छेदों का जो लघुतमापवर्त्य होगा उस में हर एक उद्दिष्ट पद के छेद का भाग देने से जो २ लब्ध होगा उस से अपने २ अंशों को गुण देओ वे गुणनफल समच्छेद पदों के अंश हैं और वह लघुतमापवर्त्य हि सब समच्छेद पदों का छेद है ।

अब संकलन की यह रीति है कि पहिले उद्दिष्ट पदों को समच्छेद करो फिर उन समच्छेद पदों के अंशों का योग करो वह अभीष्ट योग का अंश है और जो समच्छेद पदों का छेद है वही अभीष्ट योग का छेद है ।

और व्यवकलन की यह रीति है कि पहिले उद्दिष्ट पदों को समच्छेद करो फिर उन में जो पद वियोजक हो उस के अंश को वा अनेक वियोजक हों तो उन के अंशों के योग को वियोज्य में वा वियोज्यों के योग में घटा देने से जो शेष बचे वह अभीष्ट अन्तर का अंश है और जो समच्छेद पदों का छेद है सो हि अभीष्ट अन्तर का छेद है ।

इस की उपपत्ति ।

मानो कि $\frac{अ}{क}, \frac{ग}{घ}$ और $\frac{च}{छ}$ इन पदों का योग करना है और मानो कि इन पदों के द्योतक क्रम से य, र, और ल ये तीन पद हैं अर्थात् $य = \frac{अ}{क}, र = \frac{ग}{घ}$, और $ल = \frac{च}{छ}$ तो

$$य + र + ल = \frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ} + \frac{च}{छ} ।$$

अब मानो कि क, घ और छ इन छेदों का लघुतमापवर्त्य म है और इन में छेदों का अलग २ भाग देने से क्रम से त, थ और द ये लब्ध होते हैं ।

तो ऊपर के दोनों पक्षों को म से गुण देने से,

$$(य + र + ल)\, म = \frac{अम}{क} + \frac{गम}{घ} + \frac{चम}{छ}$$

$$\text{अथवा } (य + र + ल)\, म = अत + गथ + चद$$

$$\therefore\ य + र + ल \text{ वा, } \frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ} + \frac{च}{छ} = \frac{अत + गथ + चद}{म} ।$$

इस से संकलन की रीति की उपपत्ति स्पष्ट प्रकाशित होती है ।

इसी भांति व्यवकलन की रीति की भी युक्ति जानो ।

यहां जिन पदों का योग वा अन्तर करना है उन में जो कितने एक अभिन्नपद वा मिश्रपद हों तो वहां मिश्रपदों का योग वा अन्तर

करने के लिये पहिले अभिन्नपदों का योग वा अन्तर कर के उस में भिन्नपदों के योग वा अन्तर को जोड़ देओ। इस से क्रिया में बहुत लाघव होगा।

उदा० (१) $\frac{५ य}{१२}, \frac{४ य}{२१}$ और $\frac{३ य}{२८}$ इन का योग क्या होगा?

यहां छेदों का लघुतमापवर्त्य ८४ है,

और $\frac{८४}{१२} = ७, \frac{८४}{२१} = ४$ और $\frac{८४}{२८} = ३$

$$\therefore \left.\begin{matrix} ५ य \times ७ = ३५ य \\ ४ य \times ४ = १६ य \\ ३ य \times ३ = \ \ ९ य \end{matrix}\right\}$$ ये तीन क्रम से समच्छेद पदों के अंश हैं,

और ८४ यह लघुतमापवर्त्य हि समच्छेद है,

$\therefore \frac{३५ य}{८४}, \frac{१६ य}{८४}$ और $\frac{९ य}{८४}$ ये समच्छेद पद हैं,

$\therefore$ उद्दिष्ट पदों का योग $= \frac{५ य}{१२} + \frac{४ य}{२१} + \frac{३ य}{२८} = \frac{३५ य}{८४} + \frac{१६ य}{८४} + \frac{९ य}{८४}$

$$= \frac{३५ य + १६ य + ९ य}{८४} = \frac{६० य}{८४} = \frac{५ य}{७}।$$

अथवा पहिले जिन पदों के छेद छोटे होंगे उन का योग करके फिर उस में शेष पदों में जिस का छेद छोटा होगा उस को जोड़ देओ ऐसा हि फिर भी करो।

जैसा $\frac{५ य}{१२} + \frac{४ य}{२१} + \frac{३ य}{२८}$

$$= \frac{१}{३}\left(\frac{५ य}{४} + \frac{४ य}{७}\right) + \frac{३ य}{२८}$$

$$=\frac{१}{३}\left(\frac{३५ य+१६ य}{२८}\right)+\frac{३ य}{२८}=\frac{१}{३}\cdot\frac{५१ य}{२८}+\frac{३ य}{२८}$$

$$=\frac{१७ य}{२८}+\frac{३ य}{२८}=\frac{२० य}{२८}=\frac{५ य}{७}\text{ ।}$$

उदा० (२) $\frac{३ य-२ र}{१०}+\frac{२ य+३ र}{१५}+\frac{१३ यर}{३०(५ य-र)}$

$$=\frac{१}{५}\left\{\frac{३ य-२ र}{२}+\frac{२ य+३ र}{३}\right\}+\frac{१३ यर}{३०(५ य-र)}$$

$$=\frac{१}{२}\left\{\frac{३(३ य-२ र)+२(२ य+३ र)}{६}\right\}+\frac{१३ यर}{३०(५ य-र)}$$

$$=\frac{१}{५}\left\{\frac{९ य-६ र+४ य+६ र}{६}\right\}+\frac{१३ यर}{३०(५ य-र)}$$

$$=\frac{१}{५}\cdot\frac{१३ य}{६}+\frac{१३ यर}{३०(५ य-र)}=\frac{१३ य}{३०}+\frac{१३ यर}{३०(५ य-र)}$$

$$=\frac{१३ य(५ य-र)}{३०(५ य-र)}+\frac{१३ यर}{३०(५ य-र)}=\frac{६५ य^२-१३ यर+१३ यर}{३०(५ य-र)}$$

$$=\frac{६५ य^२}{३०(५ य-र)}=\frac{१३ य^२}{६(५ य-र)}\text{ ।}$$

उदा० (३) $\frac{१}{६ रल}$, $\frac{१}{१४ यल}$ और $\frac{१}{२१ यर}$ इन का योग क्या है ?

न्यास । $\frac{१}{६ रल}+\frac{१}{१४ यल}+\frac{१}{२१ यर}=\frac{७ य}{४२ यरल}+\frac{३ र}{४२ यरल}+\frac{२ ल}{४२ यरल}$

$$=\frac{७ य+३ र+२ ल}{४२ यरल}=\text{उद्दिष्ट पदों का योग ।}$$

उदा० (४) $\frac{अ+य}{अ-य}$ और $\frac{अ-य}{अ+य}$ इन का योग क्या है ?

$$\text{योग} = \frac{\text{अ}+\text{य}}{\text{अ}-\text{य}} + \frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{अ}+\text{य}} = \frac{(\text{अ}+\text{य})^{२}+(\text{अ}-\text{य})^{२}}{(\text{अ}-\text{य})(\text{अ}+\text{य})}$$

$$= \frac{\text{अ}^{२}+२\,\text{अय}+\text{य}^{२}+\text{अ}^{२}-२\,\text{अय}+\text{य}^{२}}{\text{अ}^{२}-\text{य}^{२}} = \frac{२(\text{अ}^{२}+\text{य}^{२})}{\text{अ}^{२}-\text{य}^{२}} \text{ ।}$$

उदा० (५) $\frac{१}{२(१+\text{य})} + \frac{१}{२(१-\text{य})} + \frac{१}{१+\text{य}^{२}}$

$$= \frac{१}{२}\left\{\frac{१}{१+\text{य}} + \frac{१}{१-\text{य}}\right\} + \frac{१}{१+\text{य}^{२}}$$

$$= \frac{१}{२}\left\{\frac{१-\text{य}+१+\text{य}}{(१+\text{य})(१-\text{य})}\right\} + \frac{१}{१+\text{य}^{२}}$$

$$= \frac{१}{२}\cdot\frac{२}{१-\text{य}^{२}} + \frac{१}{१+\text{य}^{२}} = \frac{१}{१-\text{य}^{२}} + \frac{१}{१+\text{य}^{२}}$$

$$= \frac{१+\text{य}^{२}+१-\text{य}^{२}}{(१-\text{य}^{२})(१+\text{य}^{२})} = \frac{२}{१-\text{य}^{४}}$$

उदा० (६) $\frac{५\text{य}}{७}$ इस में $\frac{३\text{य}}{५}$ इस को घटा देओ ।

$$\text{अभीष्ट अन्तर} = \frac{५\text{य}}{७} - \frac{३\text{य}}{५} = \frac{२५\text{य}}{३५} - \frac{२१\text{य}}{३५} = \frac{२५\text{य}-२१\text{य}}{३५} = \frac{४\text{य}}{३५} \text{ ।}$$

उदा० (७) $\frac{१}{\text{य}-१}$ इस में $\frac{१}{\text{य}+१}$ इस को घटा देओ ।

$$\text{अभीष्ट अन्तर} = \frac{१}{\text{य}-१} - \frac{१}{\text{य}+१} = \frac{\text{य}+१-(\text{य}-१)}{(\text{य}-१)(\text{य}+१)}$$

$$= \frac{\text{य}+१-\text{य}+१}{(\text{य}-१)(\text{य}+१)} = \frac{२}{\text{य}^{२}-१} \text{ ।}$$

उदा० (८) $\frac{१}{\text{य}+१} - \frac{१}{\text{य}+२} + \frac{१}{\text{य}+३}$

$$=\frac{\text{य}+\text{२}-(\text{य}+\text{१})}{(\text{य}+\text{१})\ (\text{य}+\text{२})}+\frac{\text{१}}{\text{य}+\text{३}}=\frac{\text{य}+\text{२}-\text{य}-\text{१}}{(\text{य}+\text{१})\ (\text{य}+\text{२})}+\frac{\text{१}}{\text{य}+\text{३}}$$

$$=\frac{\text{१}}{(\text{य}+\text{१})\ (\text{य}+\text{२})}+\frac{\text{१}}{\text{य}+\text{३}}=\frac{\text{य}+\text{३}+(\text{य}+\text{१})\ (\text{य}+\text{२})}{(\text{य}+\text{१})\ (\text{य}+\text{२})\ (\text{य}+\text{३})}$$

$$=\frac{\text{य}+\text{३}+\text{य}^{\text{२}}+\text{३}\,\text{य}+\text{२}}{(\text{य}+\text{१})\ (\text{य}+\text{२})\ (\text{य}+\text{३})}=\frac{\text{य}^{\text{२}}+\text{४}\,\text{य}+\text{५}}{(\text{य}+\text{१})\ (\text{य}+\text{२})\ (\text{य}+\text{३})}$$

उदा० (९) $\frac{\text{१}}{\text{य}^{\text{२}}-\text{४}\,\text{य}+\text{८}}-\frac{\text{१}}{\text{य}^{\text{२}}+\text{४}\,\text{य}+\text{८}}$

$$=\frac{\text{य}^{\text{२}}+\text{४}\,\text{य}+\text{८}-(\text{य}^{\text{२}}-\text{४}\,\text{य}+\text{८})}{(\text{य}^{\text{२}}-\text{४}\,\text{य}+\text{८})\ (\text{य}^{\text{२}}+\text{४}\,\text{य}+\text{८})}=\frac{\text{य}^{\text{२}}+\text{४}\,\text{य}+\text{८}-\text{य}^{\text{२}}+\text{४}\,\text{य}-\text{८}}{\text{य}^{\text{४}}+\text{६४}}$$

$$=\frac{\text{८}\,\text{य}}{\text{य}^{\text{४}}+\text{६४}}\ ।$$

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{\text{य}}{\text{६}}+\frac{\text{१७}\,\text{य}}{\text{२२}}+\frac{\text{२}\,\text{य}}{\text{३३}}=\text{य}$ ।

(२) $\frac{\text{२}\,\text{अ}+\text{३}\,\text{क}}{\text{७}}+\frac{\text{अ}-\text{४}\,\text{क}}{\text{३}}=\frac{\text{१३}\,\text{अ}-\text{१९}\,\text{क}}{\text{२१}}$ ।

(३) $\frac{\text{२}\,\text{य}+\text{५}\,\text{र}}{\text{य}+\text{२}\,\text{र}}+\frac{\text{३}\,\text{य}-\text{र}}{\text{५}\,\text{य}+\text{र}}=\frac{\text{१३}\,\text{य}^{\text{२}}+\text{३२}\,\text{यर}+\text{३}\,\text{र}^{\text{२}}}{\text{५}\,\text{य}^{\text{२}}+\text{११}\,\text{यर}+\text{२}\,\text{र}^{\text{२}}}$ ।

(४) $\frac{\text{३}\,\text{अ}+\text{२}\,\text{क}}{\text{अ}+\text{क}}+\frac{\text{३}\,\text{अ}-\text{२}\,\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}=\frac{\text{२}\,(\text{३}\,\text{अ}^{\text{२}}-\text{२}\,\text{क}^{\text{२}})}{\text{अ}^{\text{२}}-\text{क}^{\text{२}}}$ ।

(५) $\frac{\text{य}+\text{र}}{\text{य}+\text{२}\,\text{र}}+\frac{\text{य}+\text{३}\,\text{र}}{\text{य}-\text{६}\,\text{र}}=\frac{\text{२}\,\text{य}^{\text{२}}}{\text{य}^{\text{२}}-\text{४}\,\text{यर}-\text{१२}\,\text{र}^{\text{२}}}$ ।

(६) $\frac{\text{३}\,\text{य}-\text{५}}{\text{य}+\text{१}}+\frac{\text{२}\,\text{य}+\text{५}}{(\text{य}+\text{१})^{\text{२}}}=\frac{\text{३}\,\text{य}^{\text{२}}}{(\text{य}+\text{१})^{\text{२}}}$ ।

(७) $$\frac{अ-१}{अ+१}+\frac{अ+१}{अ-१}+\frac{अ-३}{अ^२-१}=२+\frac{१}{अ-१} ।$$

(८) $$\frac{२य^२-१० यर+५ र^२}{१५ य^२-यर-२ र^२}+\frac{य-र}{५ य-२ र}=\frac{य-२ र}{३ य+र} ।$$

(९) $$\frac{१}{य+१}+\frac{२}{य+२}=\frac{३ य+४}{(य+१)(य+२)} ।$$

(१०) $$\frac{(अ+क)^२}{(अ-क)^२}+\frac{(अ-क)^२}{(अ+क)^२}=२\left(\frac{अ^४+६ अ^२क^२+क^४}{अ^४-२ अ^२क^२+क^४}\right) ।$$

(११) $$\frac{३ य+२}{२०}+\frac{११ य+४}{३६}+\frac{२(य-१)}{४५}=\frac{३ य+१}{६} ।$$

(१२) $$\frac{१}{१२(य+१)}+\frac{४}{३(य-२)}+\frac{९}{४(य-३)}=\frac{११ य^२-१६ य-२४}{३(य^३-४ य^२+य+६)} ।$$

(१३) $$\frac{२ अ-क}{१०}+\frac{३ अ+८ क}{१४}+\frac{३ अ+क}{३५}=\frac{अ+क}{२} ।$$

(१४) $$\frac{१}{य}+\frac{५}{य+२}+\frac{२२ य+४}{य(य^२-४)}=\frac{६}{य-२} ।$$

(१५) $$\frac{१}{य-१}+\frac{१}{य-२}+\frac{१}{य+३}=\frac{३ य^२-७}{(य-१)(य-२)(य+३)} ।$$

(१६) $$\frac{य+र}{य^२+यर+र^२}+\frac{य-र}{य^२-यर+र^२}=\frac{२ य^३}{य^४+य^२र^२+र^४} ।$$

(१७) $$\frac{२ अ+क}{य+१}+\frac{अ-क}{य-१}+\frac{अ}{य^२-१}+\frac{२ क}{य^२+१}$$
$$=\frac{३ अय^३+३ अय-४ क}{य^४-१} ।$$

(१८) $$\frac{२य-१}{२(य+१)}+\frac{य+२६}{य+२}+\frac{२य-७५}{२(य+३)}=\frac{३य^{२}}{(य+१)(य+२)(य+३)}।$$

(१९) $$\frac{अ-क}{(अ-ग)(क+ग)}+\frac{क-ग}{(अ+क)(अ-ग)}=\frac{अ+ग}{(अ+क)(क+ग)}।$$

(२०) $$\frac{१}{अ+क}+\frac{१}{अ-क}+\frac{१}{अ^{२}+क^{२}}+\frac{१}{अ^{२}-क^{२}}$$
$$=\frac{२अ(अ^{२}+अ+क^{२})}{अ^{४}-क^{४}}।$$

(२१) $$\frac{अ^{२}+२अक+२क^{२}}{अ^{२}-२अक+२क^{२}}+\frac{अ^{२}-२अक+२क^{२}}{अ^{२}+२अक+२क^{२}}$$
$$=२\left(\frac{अ^{४}+८अ^{२}क^{२}+४क^{४}}{अ^{४}+४क^{४}}\right)।$$

(२२) $$\frac{२य+२६}{य+१}+\frac{४य-१}{२य+१}+\frac{४य-७५}{२य+३}=\frac{२४य^{२}}{(य+१)(२य+१)(२य+३)}।$$

(२३) $$\frac{२}{३य+५}+\frac{१}{२(य-१)}+\frac{४}{५य-३}$$
$$=\frac{५९य^{२}-४३}{(३य+५)(२य-२)(५य-३)}।$$

(२४) $$\frac{य-१}{य^{२}+२य+२}+\frac{य+१}{य^{२}-२य+२}=\frac{२य(य^{२}+४)}{य^{४}+४}।$$

(२५) $$\frac{य-२}{२य^{२}-२१य+५४}+\frac{य+२}{य^{२}+य}+\frac{५}{३(२य-९)}+\frac{१}{य+१}$$
$$=\frac{२(५य-१८)}{३य(य-६)}।$$

(२६) $$\frac{य^२ + २}{य^२ + २ य + ४} + \frac{य^२ - ४}{य^२ - य - २} + \frac{य^३ + १० य + २०}{य^४ + य^३ - ८ य - ८}$$
$$= \frac{२ य^३ (य + १)}{य^४ + य^३ - ८ य - ८} ।$$

(२७) $$\frac{१}{३ (२ य + १)} + \frac{१}{७ (२ य + ३)} + \frac{८}{२१ (४ य - १)}$$
$$= \frac{४ य (४ य + ५)}{३ (२ य + १) (२ य + ३) (४ य - १)} ।$$

(२८) $$\frac{अक}{(अ - ग) (क - ग)} + \frac{अग + क^२}{(अ - क) (क - ग)} + \frac{कग}{(अ - क) (अ - ग)}$$
$$= \frac{अक + अग + कग}{(अ - क) (क - ग)} ।$$

(२९) $$\frac{१}{य + र} + \frac{१}{य^२ + यर + र^२} + \frac{१}{य - र} + \frac{१}{य^२ - यर + र^२}$$
$$= \frac{२ (य^५ + य^४ + य^३ र^२ + यर^४ - र^४}{य^६ - र^६} ।$$

(३०) $$\frac{य^२ + २ य + ४}{य^२ - २ य + ४} + \frac{य^४ + ४ य^२ + १६}{य^४ - ४ य^२ + १६} + \frac{य^२ - २ य + ४}{य^२ + २ य + ४}$$
$$+ \frac{य^४ - ४ य^२ + १६}{य^४ + ४ य^२ + १६} = \frac{४ (य^८ + ४ य^६ + १६ य^४ + ६४ य^२ + २५६)}{य^८ + १६ य^४ + २५६} ।$$

(३१) $$\frac{८ य}{१५} - \frac{३ य}{१०} - \frac{य}{६} = \frac{य}{१५} \text{ और } \frac{५ य - १}{९} - \frac{२ य - ५}{६} = \frac{४ य + १३}{१८} ।$$

(३२) $$\frac{३ य - र}{२ य - र} - \frac{य + र}{३ य + र} = \frac{य (७ य - र)}{६ य^२ - यर - र^२} ।$$

(३३) $$\frac{य + २}{य + १} - \frac{२ (य + १)}{२ य + १} = \frac{य}{(य + १) (२ य + १)}$$

(३४) $\frac{य(२य-र)}{(य-र)^२} - \frac{२य+र}{य-र} = \frac{र^२}{(य-र)^२}$ ।

(३५) $\frac{२(अ^२+क^२)}{अ^२-क^२} - \frac{अ-क}{अ+क} + \frac{अ+क}{अ-क} = २\left(\frac{अ+क}{अ-क}\right)$ ।

(३६) $\frac{३य+२र}{४} - \frac{य+३र}{६} = \frac{७य}{१२}$ ।

(३७) $\frac{३}{य} - \frac{१}{य+१} = \frac{२य+३}{य^२+य}$ ।

(३८) $\frac{५}{अ-क} - \frac{अ+९क}{अ^२-क^२} = \frac{४}{अ+क}$ ।

(३९) $\frac{य+१}{य^२-४य+८} - \frac{य-१}{य^२+४य+८} = \frac{२(५य^२+८)}{य^४+६४}$ ।

(४०) $\frac{अ+२क}{अ^२+२अक+२क^२} - \frac{अ-२क}{अ^२-२अक+२क^२} = \frac{८क^३}{अ^४+४क^४}$ ।

(४१) $\frac{१}{अ} - \frac{१}{अ-३} + \frac{३}{अ-४} = \frac{१२}{अ(अ-३)(अ-४)}$ ।

(४२) $\frac{१}{अ-५} + \frac{१}{अ+३} - \frac{२}{अ-१} = \frac{३२}{(अ-५)(अ+३)(अ-१)}$ ।

(४३) $\frac{४}{य-५} + \frac{१}{य-४} - \frac{४}{य-३} = \frac{य^२-१७}{(य-५)(य-४)(य-३)}$ ।

(४४) $\frac{१}{य^२+य+१} + \frac{१}{य^२-य+१} - \frac{२}{य^४-य^२+१}$

$= \frac{२य^२(य^४-य^२-१)}{य^८+य^४+१}$ ।

(४५) $\frac{य+१}{य-२}+\frac{य-२}{य+३}-\frac{य+३}{य+२}=\frac{य^{३}+१०य+३२}{य^{३}+३य^{२}-४य-१२}$ ।

(४६) $\frac{(अ-य)^{३}}{(अ+य)^{३}}+\frac{(अ-य)^{२}}{(अ+य)^{२}}-\frac{अ-य}{अ+य}=\frac{अ^{३}-५अ^{२}य+३अय^{२}+य^{३}}{अ^{३}+३अ^{२}य+३अय^{२}+य^{३}}$ ।

(४७) $\frac{१}{अ+क}-\frac{२}{अ+२क}+\frac{१}{अ+३क}=\frac{२क^{२}}{(अ+क)(अ+२क)(अ+३क)}$

(४८) $\frac{१}{८८(य+१३)}-\frac{१}{२४(य+५)}+\frac{१}{३३(य+२)}$

$=\frac{१}{(य+१३)(य+५)(य+२)}$

(४९) $\frac{१}{२य}-\frac{१}{य-१}+\frac{१}{२(य-२)}=\frac{१}{य(य-१)(य-२)}$ ।

(५०) $\frac{२}{य+२}-\frac{९}{य+३}+\frac{८}{य+४}=\frac{य^{२}}{(य+२)(य+३)(य+४)}$ ।

(५१) $\frac{अ^{२}-१}{२अ(अ^{२}+१)}-\frac{अ^{२}+१}{२अ(अ^{२}-१)}+\frac{२अ}{अ^{४}-१}=०$ ।

(५२) $\frac{३य+५}{य^{२}-य-६}-\frac{२य+१}{य^{२}+य-२}-\frac{य-१}{य^{२}-४य+३}$

$=\frac{६य}{य^{३}-२य^{२}-५य+६}$ ।

(५३) $\frac{५अ-४}{(अ-३)(अ-२)}-\frac{२अ+३}{(अ-३)(अ-१)}-\frac{३अ+१}{(अ-२)(अ-१)}$

$=\frac{१३}{(अ-३)(अ-२)(अ-१)}$ ।

(५४) $$\frac{\text{१}}{(\text{य}-\text{र})(\text{य}-\text{ल})(\text{य}-\text{व})}-\frac{\text{१}}{(\text{य}-\text{र})(\text{र}-\text{ल})(\text{र}-\text{व})}+\frac{\text{१}}{(\text{य}-\text{ल})(\text{र}-\text{ल})(\text{ल}-\text{व})}=\frac{\text{१}}{(\text{य}-\text{व})(\text{र}-\text{व})(\text{ल}-\text{व})}\text{ ।}$$

(५५) $$\frac{\text{य}-\text{३}}{\text{य}+\text{१}}-\frac{\text{य}+\text{३}}{\text{य}-\text{१}}+\frac{\text{य}+\text{१}}{\text{य}-\text{३}}-\frac{\text{य}-\text{१}}{\text{य}+\text{३}}=\frac{\text{६४ य}}{\text{य}^{\text{४}}-\text{१० य}^{\text{२}}+\text{९}}\text{ ।}$$

(५६) $$\frac{\text{क}+\text{ग}+\text{घ}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{अ}-\text{ग})(\text{अ}-\text{घ})}-\frac{\text{अ}+\text{क}+\text{ग}}{(\text{अ}-\text{घ})(\text{क}-\text{घ})(\text{ग}-\text{घ})}+\frac{\text{अ}+\text{क}+\text{घ}}{(\text{अ}-\text{ग})(\text{क}-\text{ग})(\text{ग}-\text{घ})}=\frac{\text{अ}+\text{ग}+\text{घ}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{क}-\text{ग})(\text{क}-\text{घ})}\text{ ।}$$

(५७) $$\frac{\text{१}}{\text{अ}(\text{अ}-\text{क})(\text{अ}-\text{ग})}-\frac{\text{१}}{\text{क}(\text{अ}-\text{क})(\text{क}-\text{ग})}+\frac{\text{१}}{\text{ग}(\text{अ}-\text{ग})(\text{क}-\text{ग})}=\frac{\text{१}}{\text{अकग}}\text{ ।}$$

(५८) $$\frac{\text{थद}+\text{थध}+\text{दध}}{(\text{त}-\text{थ})(\text{त}-\text{द})(\text{त}-\text{ध})}-\frac{\text{तद}+\text{तध}+\text{दध}}{(\text{त}-\text{थ})(\text{थ}-\text{द})(\text{थ}-\text{ध})}+\frac{\text{तथ}+\text{तध}+\text{थध}}{(\text{त}-\text{द})(\text{थ}-\text{द})(\text{द}-\text{ध})}=\frac{\text{तथ}+\text{तद}+\text{थद}}{(\text{त}-\text{ध})(\text{थ}-\text{ध})(\text{द}-\text{ध})}\text{ ।}$$

(५९) $$\frac{\text{य}^{\text{२}}+\text{पय}+\text{फ}}{\text{य}(\text{य}-\text{र})(\text{य}-\text{ल})}-\frac{\text{र}^{\text{२}}+\text{पर}+\text{फ}}{\text{र}(\text{य}-\text{र})(\text{र}-\text{ल})}+\frac{\text{ल}^{\text{२}}+\text{पल}+\text{फ}}{\text{ल}(\text{य}-\text{ल})(\text{र}-\text{ल})}=\frac{\text{फ}}{\text{यरल}}\text{ ।}$$

(६०) $$\frac{\text{फबभ}}{(\text{प}-\text{फ})(\text{प}-\text{ब})(\text{प}-\text{भ})}-\frac{\text{पबभ}}{(\text{प}-\text{फ})(\text{फ}-\text{ब})(\text{फ}-\text{भ})}+\frac{\text{पफभ}}{(\text{प}-\text{ब})(\text{फ}-\text{ब})(\text{ब}-\text{भ})}-\frac{\text{पफब}}{(\text{प}-\text{भ})(\text{फ}-\text{भ})(\text{ब}-\text{फ})}=\text{१ ।}$$

४ भिन्नपदों का गुणन ।

६५। रीति । गुण्यगुणकरूप पदों के अंशों का गुणनफल अभीष्ट गुणनफल का अंश है और छेदों का गुणनफल अभीष्ट गुणनफल का छेद है ।

इस की उपपत्ति ।

माने कि $\frac{अ}{क}$ और $\frac{ग}{घ}$ इन दो पदों के द्योतक क्रम से य और र हैं अर्थात् य $= \frac{अ}{क}$ और र $= \frac{ग}{घ}$, तो कय $=$ अ, और घर $=$ ग,

$\therefore$ कघयर $=$ अग $\therefore$ यर वा $\frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अग}{कघ}$ यह सिद्ध हुआ ।

इसी भांति तीन वा बहुत पदों के गुणन में युक्ति जानो ।

उदा० (१) $\frac{८ अय^२}{९ क^२र}$ और $\frac{१५ अ^२क}{१६ यर^२}$ इन का गुणनफल क्या होगा?

$$गुणनफल = \frac{८ अय^२}{९ क^२र} \times \frac{१५ अ^२क}{१६ यर^२} = \frac{८ अय^२ \times १५ अ^२क}{९ क^२र \times १६ यर^२}$$

$$= \frac{१२० अ^३कय^२}{१४४ क^२यर^३}$$ अंश और छेद इन दोनों में

२४ कय का भाग देने से $= \frac{५ अ^३य}{६ कर^३}$ ।

उदा० (२) $\frac{४ अय + ६ अ}{५ य - १०}$ और $\frac{४ य - ८}{६ कय + ९ क}$ इन का गुणनफल क्या है ?

$$गुणनफल = \frac{४ अय + ६ अ}{५ य - १०} \times \frac{४ य - ८}{६ कय + ९ क}$$

$$= \frac{२ अ (२ य + ३)}{५ (य - २)} \times \frac{४ (य - २)}{३ क (२ य + ३)}$$

$$= \frac{२ अ (२ य + ३) ४ (य - २)}{५ (य - २) ३ क (२ य + ३)} = \frac{८ अ}{१५ क} ।$$

उदा० (३) $\frac{(अ-क)^३}{अ^३+क^३}$, $\frac{(अ+क)^३}{अ^३-क^३}$ और $\frac{अ^२+अक+क^२}{अ^२-क^२}$ इन का गुणनफल

$$=\frac{(अ-क)^३\times(अ+क)^३\times(अ^२+अक+क^२)}{(अ^३+क^३)\,(अ^३-क^३)\,(अ^२-क^२)}$$

$$=\frac{(अ-क)\,(अ-क)\,(अ-क)\,(अ+क)\,(अ+क)\,(अ+क)\,(अ^२+अक+क^२)}{(अ+क)\,(अ^२-अक+क^२)\,(अ-क)\,(अ^२+अक+क^२)\,(अ+क)\,(अ-क)}$$

$$=\frac{(अ-क)\,(अ+क)}{अ^२-अक+क^२}=\frac{अ^२-क^२}{अ^२-अक+क^२}\text{ ।}$$

उदा० (४) $\frac{य^२}{३र}+\frac{५अय}{४र^२}+\frac{२अ^२}{र^३}$ इस को $\frac{२य}{र}-\frac{अ}{३र^२}$ इस से गुण देओ।

पहिले (३०) वें प्रक्रम में (५) वें उदाहरण में जिस भांति गुण्य के नीचे गुणक को लिख के गुणन का प्रकार दिखलाया है उसी प्रकार से यहां भी न्यास करो।

$$\frac{य^२}{३र}+\frac{५अय}{४र^२}+\frac{२अ^२}{र^३}$$

$$\frac{२य}{र}-\frac{अ}{३र^२}$$

$$\frac{२य^३}{३र^२}+\frac{५अय^२}{२र^३}+\frac{४अ^२य}{र^४}$$

$$-\frac{अय^२}{९र^३}-\frac{५अ^२य}{१२र^४}-\frac{२अ^३}{३र^५}$$

$$\frac{२य^३}{३र^२}+\frac{४३अय^२}{१८र^३}+\frac{४३अ^२य}{१२र^४}-\frac{२अ^३}{३र^५}$$

अथवा पहिले गुण्यगुणकों को सवर्णित करने से

$$\frac{४य^२र^२+१५अयर+२४अ^२}{१२र^३}\text{ और }\frac{६यर-अ}{३र^२}$$

और फिर इन का गुणन करने से

$$\frac{४ य^२ र^२ + १५ अयर + २४ अ^२}{१२ र^३} \times \frac{६ यर - अ}{३ र^२}$$

$$= \frac{२४ य^३ र^३ + ८६ अय^२ र^२ + १२९ अ^२ यर - २४ अ^३}{३६ र^५}$$

$$= \frac{२४ य^३ र^३}{३६ र^५} + \frac{८६ अय^२ र^२}{३६ र^५} + \frac{१२९ अ^२ यर}{३६ र^५} - \frac{२४ अ^३}{३६ र^५}$$

$$= \frac{२ य^३}{३ र^२} + \frac{४३ अय^२}{१८ र^३} + \frac{४३ अ^२ य}{१२ र^४} - \frac{२ अ^३}{३ र^५} ।$$

जो ऊपर गुणनफल हुआ था वैसा हि हुआ ।

उदा० (५) $क + \frac{क^२}{अ - क}$ और $क - \frac{क^२}{अ + क}$ इन का गुणनफल क्या है ?

यहां $$क + \frac{क^२}{अ - क} = \frac{अक - क + क^२}{अ - क} = \frac{अक}{अ - क}$$

और $$क - \frac{क^२}{अ + क^२} = \frac{अक + क^२ - क^२}{अ + क} = \frac{अक}{अ + क}$$

$$\therefore \quad गुणनफल = \frac{अक}{अ - क} \times \frac{अक}{अ + क} = \frac{अ^२ क^२}{अ^२ - क^२} ।$$

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{३ अ}{५ क} \times \frac{२ ग}{७ घ} = \frac{६ अग}{३५ कघ}$ और $\frac{१२ अय}{४९ कर} \times \frac{१४ अक}{१५ यर} = \frac{८ अ^२}{३५ यर^२}$ ।

(२) $\frac{अ}{अ - क} \times \frac{अ + क}{क} = \frac{अ^२ + अक}{अक - क^२}$ ।

(३) $\frac{४ य^२ + ४ यर}{५ यर - ५ र^२} \times \frac{३ यल - ३ रल}{२ यव + २ रव} = \frac{६ यल}{५ रव}$ ।

(४) $\frac{२य+३र}{३य+२र} \times \frac{२य-३र}{३य-२र} = \frac{४य^२-९र^२}{९य^२-४र^२}$ ।

(५) $\frac{२य-४र}{२१य} \times \frac{७र}{३य-६र} = \frac{२र}{९य}$ ।

(६) $\frac{य-५}{३य+४} \times \frac{य+२}{२य-१} = \frac{य^२-३य-१०}{६य^२+५य-४}$ ।

(७) $\frac{३य+२र}{५य-र} \times \frac{४य-५र}{७य+९र} = \frac{१२य^२-७यर-१०र^२}{३५य^२+३८यर-९र^२}$ ।

(८) $\frac{२य+अ}{५य-क} \times \frac{७य-२क}{९य-४अ} = \frac{१४य^२+(७अ-४क)य-२अक}{४५य^२-(२०अ+९क)य+४अक}$ ।

(९) $\frac{७य^२-१०य+३}{२य^२-य-१०} \times \frac{य^२+६य+८}{३य^२-४य+१} = \frac{७य^२+२५य-१२}{६य^२-१७य+५}$ ।

(१०) $\frac{य^३+र^३}{य^३-र^३} \times \frac{य^२+यर+र^२}{य^२-यर+र^२} = \frac{य+र}{य-र}$ ।

(११) $\frac{अ^२-क^२}{अय} \times \frac{३य^२}{अ^३+क^३} = \frac{३य(अ-क)}{अ(अ^२-अक+क^२)}$ ।

(१२) $\left(१-\frac{क^३}{अ^३}\right) \times \frac{अ^२क^२}{अ^२-क^२} = क^२+\frac{क^४}{अ(अ+क)}$ ।

(१३) $\frac{६अक}{२अ^२-३अक+क^२} \times \frac{६अ^२-अक-क^२}{३अक-१५क^२}$

$\times \frac{अ^२-६अक+५क^२}{२१अ^२+अक-२क^२} = \frac{२अ}{७अ-२क}$ ।

(१४) $\frac{(अ+क)^२}{(अ-क)^२} \times \frac{अ^२-क^२}{अ^२+क^२} = \frac{अ^३+३अ^२क+३अक^२+क^३}{अ^३-अ^२क+अक^२-क^३}$ ।

(१५) $\left(\frac{अ^2}{क}+\frac{अ}{क^2}\right)\times\left(\frac{अ}{५}-\frac{४}{क}\right)=\frac{अ^3}{५क}-\frac{१९ अ^2}{५ क^2}-\frac{४ अ}{क^3}$ ।

(१६) $\frac{य^2-र^2}{य^2+५यर+६र^2}\times\frac{य^2+यर-६र^2}{य^2-४यर+३र^2}\times\frac{य^2-यर-६र^2}{२य^2+७यर+५र^2}$

$=\frac{य-२र}{२य+५र}$ ।

(१७) $\left(\frac{य^2}{र^2}+\frac{य}{र}+१\right)\times\left(\frac{य^2}{र^2}-\frac{य}{र}+१\right)=\frac{य^४}{र^४}+\frac{य^2}{र^2}+१$ ।

(१८) $\left\{\frac{अ}{अ-य}-\frac{अ}{अ+य}\right\}\times\left\{\frac{अ}{क}+\frac{य}{अ}\right\}=२\left\{\frac{अ^2+य^2}{अ^2-य^2}\right\}$ ।

(१९) $\frac{अ^2-१}{अ^2-४}\times\frac{अ^2-अ-६}{अ^2+४अ+३}\times\frac{अ^2-अ-१२}{अ^2+अ-१२}$

$=\frac{अ^2-५अ+४}{अ^2+२अ-८}$ ।

(२०) $\left\{\frac{य+र}{य-र}+\frac{य-र}{य+र}\right\}\times\left\{\frac{य+र}{य-र}-\frac{य-र}{य+र}\right\}=\frac{८यर(य^2+र^2)}{(य^2-र^2)^2}$ ।

(२१) $\left\{\frac{अ^3}{८क^3}+\frac{अ^2}{२क^2}+\frac{अ}{क}+१\right\}\times\left\{\frac{अ^3}{८क^3}-\frac{अ^2}{२क^2}+\frac{अ}{क}-१\right\}$

$=\frac{अ^६}{६४क^६}-१$ ।

(२२) $\left\{\frac{क+ग}{अ-क}+\frac{अ+क}{क-ग}\right\}\times\left\{\frac{अ+ग}{क-ग}-\frac{क+ग}{अ-ग}\right\}$

$=\frac{(अ+क)(अ+ग)}{(क-ग)^2}$ ।

(२३) $\left\{अ-\frac{क^2(अ-क)}{अ^2+क^2}\right\}\times\left\{अ-क+\frac{२क^2}{अ+क}\right\}$

$=अ^2-अक+क^2$ ।

(२४) $\left\{य + \frac{र^2(४य+र)}{य^2 - ४र^2}\right\} \times \left\{य + र - \frac{३र^2}{य-र}\right\}$

$= य^2 + यर + र^2 + \frac{२र^3}{य-र}$ ।

(२५) $\frac{(अ+क)^2}{अ^2-क^2} \times \frac{अ^3-क^3}{(अ+क)^3} \times \frac{अ^4-क^4}{(अ+क)^4}$

$= \frac{(अ^3-क^3)(अ^2+क^2)}{(अ+क)^5}$ ।

५ भिन्नपदों का भागहार ।

६६ । रीति भाजक के अंश और छेद को पलट देओ अर्थात् अंश के स्थान में छेद को और छेद के स्थान में अंश को लिख देओ फिर ऐसे भाजक से भाज्य को गुण देओ जो गुणनफल होगा सो अभीष्ट भजनफल है ।

इस की उपपत्ति ।

मानो कि $\frac{अ}{क}$ इस में $\frac{ग}{घ}$ का भाग देना है तो भिन्नपद की रीति से

$\frac{\frac{अ}{क}}{\frac{ग}{घ}}$ यह लब्धि होगी ।

अब इस के अंश और छेद को कघ से गुण देने से,

$\frac{\frac{अ}{क} \times कघ}{\frac{ग}{घ} \times कघ} = \frac{\frac{अकघ}{क}}{\frac{कगघ}{घ}} = \frac{अघ}{कग} = \frac{अ}{क} \times \frac{घ}{ग}$ यों उपपन्न हुआ ।

उदा० (१) $\frac{१५ अ^2य}{८ कर^2}$ इस में $\frac{९ यर}{१६ अ^2क^2}$ इस का भाग देओ ।

भजनफल $= \frac{१५ अ^2य}{८ कर} \div \frac{९ यर}{१६ अ^2क^2} = \frac{१५ अ^2य}{८ कर^2} \times \frac{१६ अ^2क^2}{९ यर}$

$= \frac{१५ अ^2य \times १६ अ^2क^2}{८ कर^2 \times ९ यर}$ इस में अंश और छेद को अपवर्तित करने से

$$= \frac{५ अ^२ \times २ अ^२ क}{र^२ \times ३ र} = \frac{१० अ^४ क}{३ र^३} ।$$

उदा॰ (२) $\frac{अ^२ + य^२}{(अ + य)^२} \div \frac{अ - य}{अ + य} = \frac{अ^२ + य^२}{(अ + य)^२} \times \frac{अ + य}{अ - य}$

$$= \frac{अ^२ + य^२}{अ + य} \times \frac{१}{अ - य} = \frac{अ^२ + य^२}{अ^२ - य^२} ।$$

उदा॰ (३) $\frac{१५ अ^२}{१६} + \frac{४१ अ}{७२ क} - \frac{२}{३ क^२}$ इस में $\frac{३ अ}{८} - \frac{२}{९ क}$ इस का भाग देओ ।

यहां (३१) वे प्रक्रम के तीसरे प्रकार में जो भागहार का विधि लिखा है उस से भजनफल के लिये न्यास ।

$$\frac{३ अ}{८} - \frac{२}{९ क} \Big) \frac{१५ अ^२}{१६} + \frac{४१ अ}{७२ क} - \frac{२}{३ क^२} \Big(\frac{५ अ}{२} + \frac{३}{क} ।$$

$$\frac{१५ अ^२}{१६} - \frac{१० अ}{१८ क}$$

$$\frac{९ अ}{८ क} - \frac{२}{३ क^२}$$

$$\frac{९ अ}{८ क} - \frac{२}{३ क^२}$$

अथवा पहिले भाज्य और भाजक को सवर्णित करने से;

$\frac{१३५ अ^२ क^२ + ८२ अक - ९६}{१४४ क^२}$ यह भाज्य और $\frac{२७ अक - १६}{७२ क}$ यह भाजक है । अब भाग देने से,

$$\frac{१३५ अ^२ क^२ + ८२ अक - ९६}{१४४ क^२} \div \frac{२७ अक - १६}{७२ क}$$

$$=\frac{१३५\,अ^२क^२+८२\,अक-९६}{१४४\,क^२}\times\frac{७२\,क}{२७\,अक-१६}$$

$$=\frac{७२\,क}{१४४\,क^२}\left\{\frac{१३५\,अ^२क^२+८२\,अक-९६}{२७\,अक-१६}\right\}=\frac{१}{२\,क}(५\,अक+६)$$

$$=\frac{५\,अ}{२}+\frac{३}{क}$$ जो ऊपर भजनफल आया था सो हि है।

उदा॰ (४) $\frac{अ^२+क^२}{अ^२-क^२}-\frac{अ-क}{अ+क}$ इस में $अ-\frac{अ^२}{अ+क}$ इस का भाग देओ।

यहां $$\frac{अ^२+क^२}{अ^२-क^२}-\frac{अ-क}{अ+क}=\frac{अ^२+क^२-(अ^२-२\,अक+क^२)}{अ^२-क^२}$$

$$=\frac{अ^२+क^२-अ^२+२\,अक-क^२}{अ^२-क^२}$$

$$=\frac{२\,अक}{अ^२-क^२}$$

और $$अ-\frac{अ^२}{अ+क}=\frac{अ^२+अक-अ^२}{अ+क}=\frac{अक}{अ+क}।$$

$$\therefore भजनफल=\frac{२\,अक}{अ^२-क^२}\div\frac{अक}{अ+क}=\frac{२\,अक}{अ^२-क^२}\times\frac{अ+क}{अक}=\frac{२}{अ-क}।$$

अथवा, $$भजनफल=\frac{\frac{अ^२+क^२}{अ^२-क^२}-\frac{अ-क}{अ+क}}{अ-\frac{अ^२}{अ+क}}$$ यहां अंश और छेद को

$अ^२-क^२$ से गुणा देने से $$=\frac{अ^२+क^२-(अ-क)^२}{अ(अ^२-क^२)-अ^२(अ-क)}$$

$$=\frac{अ^२+क^२-अ^२+२\,अक-क^२}{अ^३-अक^२-अ^३+अ^२क}=\frac{२\,अक}{अ^२क-अक^२}=\frac{२}{अ-क}।$$

उदा॰ (५) $\dfrac{१}{अ + \dfrac{१}{क}}$ इस को सवर्णित करो।

यहां अंश और छेद को क से गुण देने से

$$\frac{१}{अ + \dfrac{१}{क}} = \frac{क}{अक + १}$$

उदा॰ (६) $\dfrac{१}{अ + \dfrac{१}{क + \dfrac{१}{ग}}}$ इस को सवर्णित करो।

यहां सवर्णन करने के लिये (५) वे उदाहरण में क के स्थानपर

$क + \dfrac{१}{ग}$ को रखने से

$$\frac{१}{अ + \dfrac{१}{क + \dfrac{१}{ग}}} = \frac{क + \dfrac{१}{ग}}{अ\left(क + \dfrac{१}{ग}\right) + १} = \frac{कग + १}{अकग + अ + ग}$$

इस उदाहरण में जो भिन्नपद निर्दिष्ट है ऐसे भिन्नपद का नाम विततभिन्नराशि रक्खा है।

उदा॰ (७) १ में य + १ का (३१) वे प्रक्रम के तीसरे प्रकार से भाग दे के विस्तार से लब्धि कहो।

न्यास । $य+१) १ \left(\frac{१}{य} - \frac{१}{य^२} + \frac{१}{य^३} - \frac{१}{य^४} + \right.$ इत्यादि ।

$$१+\frac{१}{य}$$

$$-\frac{१}{य}$$

$$-\frac{१}{य}-\frac{१}{य^२}$$

$$\frac{१}{य^२}$$

$$\frac{१}{य^२}+\frac{१}{य^३}$$

$$-\frac{१}{य^३}$$

$$-\frac{१}{य^३}-\frac{१}{य^४}$$

$$\frac{१}{य^४}$$ इत्यादि ।

इस प्रकार से यहां

$\frac{१}{य+१}=\frac{१}{य}-\frac{१}{य^२}+\frac{१}{य^३}-\frac{१}{य^४}$ इत्यादि, यह विस्तार से लब्धि है ।

अब इस में य+१ इस भाजक के दोनों पदों को पलट के जो १+य इस का १ में भाग देओ तो

$\frac{१}{१+य}=१-य+य^२-य^३+$ इत्यादि यह लब्धि आती है इस से यह सिद्ध होता है कि

$$१ - य + य^२ - य^३ + \text{ इत्यादि} = \frac{१}{य} - \frac{१}{य^२} + \frac{२}{य^३} - \frac{१}{य^४} + \text{ इत्यादि ।}$$

ये दोनों समान पक्ष परस्पर अत्यन्त अलग २ रूप के हैं यह बड़ा हि चमत्कार है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $१ \div \frac{१}{य + र} = य + र$ और $\frac{१}{अ - क} \div \frac{१}{अ^२ - क^२} = अ + क$ ।

(२) $\frac{अक - क^२}{८} \div \frac{अग - कग}{१२} = \frac{३ क}{२ ग}$ ।

(३) $\left\{१ - \frac{य}{१ + य}\right\} \div \left\{१ + \frac{य}{१ - य}\right\} = \frac{१ - य}{१ + य}$ ।

(४) $\frac{अ + २ क}{२ अ - क} \div \frac{३ अ - ५ क}{अ - २ क} = \frac{अ^२ - ४ क^२}{६ अ^२ - १३ अक + ५ क^२}$ ।

(५) $\left\{अ^२ - \frac{१}{अ^२}\right\} \div \left\{अ - \frac{१}{अ}\right\} = अ + \frac{१}{अ}$ ।

(६) $\left\{य^३ + \frac{१}{य^३}\right\} \div \left\{य + \frac{१}{य}\right\} = य^२ + \frac{१}{य^२} - १$ ।

(७) $\left\{\frac{अ^४}{क^३} + \frac{अ^२}{क} + क\right\} \div \left\{\frac{अ^२}{क^२} - \frac{अ}{क} + १\right\} = \frac{अ^२}{क} + अ + क$ ।

(८) $\left\{\frac{य}{य + र} + \frac{र}{य - र}\right\} \div \left\{\frac{य}{य - र} - \frac{र}{य + र}\right\} = १$ ।

(९) $\left\{\frac{१}{क^२} - \frac{क}{अ^३}\right\} \div \left\{\frac{अ}{क^२} + \frac{१}{अ} + \frac{१}{क}\right\} = \frac{अ - क}{अ^२}$ ।

(१०) $\left\{य^४ - \frac{१}{य^४}\right\} \div \left\{य - \frac{१}{य}\right\} = य^३ + \frac{१}{य^३} + य + \frac{१}{य}$ ।

(११) $\frac{य^2+५यर+६र^2}{६य^2-५यर+र^2} \div \frac{य^2+२यर-३र^2}{३य^2+२यर-र^2} = \frac{य^2+३यर+२र^2}{२य^2-३यर+र^2}$ ।

(१२) $\frac{९य^2+९य-१०}{८य^2-२य-१} \div \frac{६य^2-य-२}{१२य^2-१७य-५} = \frac{९य^2-२५}{४य^2-१}$ ।

(१३) $\frac{२अ^3+७अ^2क+२अक^2-३क^3}{३०अ^3+३१अ^2क-२५अक^2-६क^3}$

$\div \frac{८अ^3+१४अ^2क-२७अक^2+९क^3}{१०अ^3-२३अ^2क-६५अक^2-१२क^3}$

$= \frac{अ^2-३अक-४क^2}{१२अ^2-१७अक+६क^2}$ ।

(१४) $\left(१+\frac{क^2}{अ^2-क^2}\right) \div \left\{१+\frac{क(२अ-क)}{(अ-क)^2}\right\} = \frac{अ-क}{अ+क}$ ।

(१५) $\frac{क-\frac{क^2}{अ+क}}{ग-\frac{ग^2}{अ+क}} = \frac{क}{ग}\cdot\frac{अ+ग}{अ+क}$ ।

(१६) $\frac{\frac{अ^3}{क^3}+\frac{क^3}{ग^3}}{\frac{अ}{क}+\frac{क}{ग}} = \frac{अ^2}{क^2}-\frac{अ}{ग}+\frac{क^2}{ग^2}$ ।

(१७) $\left\{\frac{१४अ^4}{१५य^2}-\frac{१५अ^2}{१४य^4}\right\} \div \left\{\frac{७अ^2}{५य}-\frac{३अ}{२य^2}\right\} = \frac{२अ^2}{३य}+\frac{५अ}{७य^2}$ ।

(१८) $\left\{\frac{२}{७}अ^3-\frac{१३७}{२१०}अ^2-२अ+\frac{१०}{३}\right\} \div \left\{\frac{२}{५}अ-\frac{४}{३}\right\}$

$= \frac{५}{७}अ^2+\frac{३}{४}अ-\frac{५}{२}$ ।

(१९) $$\left\{\frac{अ}{य^५} - \frac{अ^५}{य^५}\right\} \div \left\{\frac{१}{य^२} - \frac{अ}{य}\right\} = \frac{अ}{य^३} + \frac{अ^२}{य^२} + \frac{अ^३}{य} \text{ ।}$$

(२०) $$\left\{\frac{अ^२+क^२}{अ^२-क^२} - \frac{अ^२-क^२}{अ^२+क^२}\right\} \div \left\{\frac{अ+क}{अ-क} - \frac{अ-क}{अ+क}\right\} = \frac{अक}{अ^२+क^२} \text{ ।}$$

(२१) $$\frac{\dfrac{अ}{अ+ग} - \dfrac{क}{क+ग}}{\dfrac{१}{क+ग} - \dfrac{१}{अ+ग}} = ग \text{ ।}$$

(२२) $$\left\{\frac{य^२+र^२}{य^२-र^२} - \frac{य-र}{य+र}\right\} \div \left\{\frac{य^२+र^२}{य^२-र^२} + \frac{य-र}{य+र}\right\} = \frac{यर}{य^२-यर+र^२} \text{ ।}$$

(२३) $$\frac{\dfrac{१}{य^२-अय+क} - \dfrac{१}{य^२+अय+क}}{\dfrac{१}{य^२+अय+क} + \dfrac{१}{य^२-अय+क}} = \frac{अय}{य^२+क} \text{ ।}$$

(२४) $$\frac{\dfrac{१}{य-५} - \dfrac{२}{य-३} + \dfrac{१}{य-१}}{\dfrac{७}{य-७} - \dfrac{९}{य-३} + \dfrac{२}{य-१}} = \frac{य-७}{३य(य-५)} \text{ ।}$$

(२५) $$\frac{\dfrac{१}{य+४} + \dfrac{२}{य+१} - \dfrac{३}{य+२}}{\dfrac{१}{२(य-१)} - \dfrac{२}{य+२} + \dfrac{३}{२(य+३)}} = \frac{य^२+२य-३}{य^२+५य+४} \text{ ।}$$

(२६) $$\frac{\dfrac{अ+५}{अ+२} - \dfrac{अ+२}{अ+५}}{\dfrac{अ+५}{अ+२} + \dfrac{अ+२}{अ+५}} = \frac{३(२अ+७)}{२अ^२+१४अ+२९} \text{ ।}$$

(२७) $$\frac{\frac{\text{अच}}{\text{कछ}}\text{य}^2+\left(\frac{\text{गच}}{\text{घछ}}-\frac{\text{अज}}{\text{कझ}}\right)\text{यर}-\frac{\text{गज}}{\text{घझ}}\text{र}^2}{\frac{\text{च}}{\text{छ}}\text{य}-\frac{\text{ज}}{\text{झ}}\text{र}}=\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}+\frac{\text{ग}}{\text{घ}}\text{र}$$ ।

(२८) $$\left\{\frac{\text{अ}^3-\text{य}^3}{\text{अ}^3+\text{य}^3}-\frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{अ}+\text{य}}\right\}\div\left\{\frac{\text{अ}^3-\text{य}^3}{\text{अ}^3+\text{य}^3}+\frac{\text{अ}-\text{य}}{\text{अ}+\text{य}}\right\}=\frac{\text{अय}}{\text{अ}^2+\text{य}^2}$$ ।

(२९) $$\frac{\frac{\text{अय}+\text{कर}}{\text{गय}-\text{घर}}+\frac{\text{गय}+\text{घर}}{\text{अय}-\text{कर}}}{\frac{\text{अय}+\text{कर}}{\text{गय}-\text{घर}}-\frac{\text{गय}+\text{घर}}{\text{अय}-\text{कर}}}=\frac{(\text{अ}^2+\text{ग}^2)\text{य}^2-(\text{क}^2+\text{घ}^2)\text{र}^2}{(\text{अ}^2-\text{ग}^2)\text{य}^2-(\text{क}^2-\text{घ}^2)\text{र}^2}$$ ।

(३०) $$(\text{अ}^2+\text{क}^2-\text{ग}^2+2\,\text{अक})\div\frac{\text{अ}+\text{क}-\text{ग}}{\text{अ}-\text{क}+\text{ग}}$$
$$=\text{अ}^2-\text{क}^2+\text{ग}^2+2\,\text{अग}$$ ।

(३१) $$\frac{1}{\text{य}-\frac{2}{\text{य}-3}}=\frac{\text{य}-3}{\text{य}^2-3\text{य}-2}$$ ।

(३२) $$\text{त}+\frac{1}{\text{थ}+\frac{1}{\text{द}+\frac{1}{\text{ध}}}}=\frac{\text{तथदध}+\text{तथ}+\text{तध}\,\text{दध}+1}{\text{थदध}+\text{थ}+\text{ध}}$$ ।

(३३) $$\text{अ}+\frac{\text{क}}{\text{ग}+\frac{\text{घ}}{\text{च}+\frac{\text{छ}}{\text{ज}}}}=\frac{\text{अगचज}+\text{अगछ}+\text{अघज}+\text{कचज}+\text{कछ}}{\text{गचज}+\text{गछ}+\text{घज}}$$ ।

(३४) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{अ - य}{अ + य} = १ - \frac{२य}{अ} + \frac{२य^{२}}{अ^{२}} - \frac{२य^{३}}{अ^{३}} + \text{इत्यादि ।}$$

(३५) यह सिद्ध करो कि

$$\frac{य}{य^{२} - २य + १} = \frac{१}{य} + \frac{२}{य^{२}} + \frac{३}{य^{३}} + \frac{४}{य^{४}} + \text{इत्यादि ।}$$

---

६ भिन्नपदों की घातक्रिया ।

६७ । रीति । उद्दिष्ट पद के अंश का वर्गादि घात करो वही अभीष्ट घात का अंश है और छेद का वर्गादि घात करो वही अभीष्ट घात का छेद है ।

इस की उपपत्ति भिन्नगुणन की क्रिया से अति स्पष्ट है ।

उदा॰ (१) $\frac{२अ}{क}$ इस का और $-\frac{अ^{२}य}{र^{२}}$ इस का वर्ग, घन और चतुर्घात क्या है ?

न्यास । $\frac{२अ}{क}$ इस का वर्ग $= \left\{\frac{२अ}{क}\right\}^{२} = \frac{(२अ)^{२}}{क^{२}} = \frac{४अ^{२}}{क^{२}}$,

$$\text{घन} = \left\{\frac{२अ}{क}\right\}^{३} = \frac{(२अ)^{३}}{क^{३}} = \frac{८अ^{३}}{क^{३}},$$

$$\text{चतुर्घात} = \left\{\frac{२अ}{क}\right\}^{४} = \frac{(२अ)^{४}}{क^{४}} = \frac{१६अ^{४}}{क^{४}} ।$$

और $-\frac{अ^{२}य}{र^{२}}$ इस का वर्ग $= \left\{-\frac{अ^{२}य}{र^{२}}\right\}^{२} = \frac{(-अ^{२}य)^{२}}{(र^{२})^{२}} = \frac{अ^{४}य^{२}}{र^{४}}$,

$$\text{घन} = \left\{-\frac{\text{अ}^2\text{य}}{\text{र}^2}\right\}^3 = \frac{(-\text{अ}^2\text{य})^3}{(\text{र}^2)^3} = \frac{-\text{अ}^6\text{य}^3}{\text{र}^6},\ \text{वा} -\frac{\text{अ}^6\text{य}^3}{\text{र}^6}\ ।$$

$$\text{चतुर्घात} = \left\{-\frac{\text{अ}^2\text{य}}{\text{र}^2}\right\}^4 = \frac{(-\text{अ}^2\text{य})^4}{(\text{र}^2)^4} = \frac{\text{अ}^8\text{य}^4}{\text{र}^8}\ ।$$

उदा॰ (२) $\dfrac{\text{य}^2+\text{य}-१}{\text{य}^2+२\text{य}-२}$ इस का वर्ग और घन कहो।

$$\frac{\text{य}^2+\text{य}-१}{\text{य}^2+२\text{य}-२}\ \text{इस का वर्ग} = \frac{(\text{य}^2+\text{य}-१)^2}{(\text{य}^2+२\text{य}-२)^2} = \frac{\text{य}^4+२\text{य}^3-\text{य}^2-२\text{य}+१}{\text{य}^4+४\text{य}^3-८\text{य}+४},$$

$$\text{घन} = \frac{(\text{य}^2+\text{य}-१)^3}{(\text{य}^2+२\text{य}-२)^3} = \frac{\text{य}^6+३\text{य}^5-५\text{य}^3+३\text{य}-१}{\text{य}^6+६\text{य}^5+६\text{य}^4-१६\text{य}^3-१२\text{य}^2+२४\text{य}-८}\ ।$$

उदा॰ (३) $\dfrac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^2+\text{य}-\dfrac{\text{क}}{\text{अ}}$ इस का वर्ग और घन क्या होगा?

न्यास।

$$\begin{array}{l}
\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^2+\text{य}-\frac{\text{क}}{\text{अ}} \\
\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^2+\text{य}-\frac{\text{क}}{\text{अ}} \\
\hline
\frac{\text{अ}^2}{\text{अ}^2}\text{य}^4+\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^3-\text{य}^2 \\
\qquad\qquad +\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^3+\text{य}^2-\frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{य} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\text{य}^2-\frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{य}+\frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2} \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{वर्ग} = \frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2}\text{य}^4+\frac{२\,\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^3-\text{य}^2-\frac{२\,\text{क}}{\text{अ}}\text{य}+\frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}$$

$$\text{वर्ग} = \frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2}\text{य}^4 + \frac{2\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^3 - \text{य}^2 - \frac{2\text{क}}{\text{अ}}\text{य} + \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^2 + \text{य} - \frac{\text{क}}{\text{अ}}$$

$$\frac{\text{अ}^3}{\text{क}^3}\text{य}^6 + \frac{2\text{अ}^2}{\text{क}^2}\text{य}^5 - \frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^4 - 2\text{य}^3 + \frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{य}^2$$

$$\frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2}\text{य}^5 + \frac{2\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^4 - \text{य}^3 - \frac{2\text{क}}{\text{अ}}\text{य}^2 + \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}\text{य}$$

$$-\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^4 - 2\text{य}^3 + \frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{य}^2 + \frac{2\text{क}^2}{\text{अ}^2}\text{य} - \frac{\text{क}^3}{\text{अ}^3}$$

$$\text{घन} = \frac{\text{अ}^3}{\text{क}^3}\text{य}^6 + \frac{3\text{अ}^2}{\text{क}^2}\text{य}^5 - 5\text{य}^3 + \frac{3\text{क}^2}{\text{अ}^2}\text{य} - \frac{\text{क}^3}{\text{अ}^3}$$

अथवा $\left\{\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^2 + \text{य} - \frac{\text{क}}{\text{अ}}\right\}^2 = \left\{\frac{\text{अ}^2\text{य}^2 + \text{अकय} - \text{क}^2}{\text{अक}}\right\}^2$

$$= \frac{\text{अ}^4\text{य}^4 + 2\text{अ}^3\text{कय}^3 - \text{अ}^2\text{क}^2\text{य}^2 - 2\text{अक}^3\text{य} + \text{क}^4}{\text{अ}^2\text{क}^2}$$

$$= \frac{\text{अ}^2}{\text{क}^2}\text{य}^4 + \frac{2\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^3 - \text{य}^2 - \frac{2\text{क}}{\text{अ}}\text{य} + \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}\text{।}$$

और $\left\{\frac{\text{अ}}{\text{क}}\text{य}^2 + \text{य} - \frac{\text{क}}{\text{अ}}\right\}^3 = \left\{\frac{\text{अ}^2\text{य}^2 + \text{अकय} - \text{क}^2}{\text{अक}}\right\}^3$

$$= \frac{\text{अ}^6\text{य}^6 + 3\text{अ}^5\text{कय}^5 - 5\text{अ}^3\text{क}^3\text{य}^3 + 3\text{अक}^5\text{य} - \text{क}^6}{\text{अ}^3\text{क}^3}$$

$= \frac{\text{अ}^3}{\text{क}^3}\text{य}^6 + \frac{3\text{अ}^2}{\text{क}^2}\text{य}^5 - 5\text{य}^3 + \frac{3\text{क}^2}{\text{अ}^2}\text{य} - \frac{\text{क}^3}{\text{अ}^3}$ जो ऊपर वर्ग और घन सिद्ध हुए थे वैसे ही ये भी हुए।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $\left\{\frac{2\text{य}}{3\text{र}}\right\}^2 = \frac{4\text{य}^2}{9\text{र}^2}$, $\left\{\frac{2\text{य}}{3\text{र}}\right\}^3 = \frac{8\text{य}^3}{27\text{र}^3}$ और $\left\{\frac{2\text{य}}{3\text{र}}\right\}^4 = \frac{16\text{य}^4}{81\text{र}^4}$ ।

(२) $\left\{-\frac{३ अक^२}{५ य^२र}\right\}^२ = \frac{९ अ^२ क^४}{२५ य^४ र^२}$,

और $\left\{-\frac{३ अक^२}{५ य^२र}\right\}^३ = -\frac{२७ अ^३क^६}{१२५ य^६र^३}$ ।

(३) $\left\{\frac{य - १}{य + १}\right\}^२ = \frac{य^२ - २ य + १}{य^२ + २ य + १}$,

और $\left\{अ - \frac{क}{अ}\right\}^२ = अ^२ - २ क + \frac{क^२}{अ^२}$ ।

(४) $\left\{\frac{२ अ}{३ क} + \frac{३ क}{४ अ}\right\}^२ = \frac{४ अ^२}{९ क^२} + १ + \frac{९ क^२}{१६ अ^२}$ ।

(५) $\left\{अ + २ - \frac{१२}{अ + २}\right\}^२ = अ^२ + ४ अ - २० + \frac{१४४}{(अ + २)^२}$ ।

(६) $\left\{\frac{३}{४}य^२ + \frac{२}{३} य - \frac{१}{२}\right\}^२ = \frac{९}{१६} य^४ + य^३ - \frac{११}{३६} य^२ - \frac{२}{३} य + \frac{१}{४}$ ।

(७) $\left\{\frac{य^२}{४ र^२} + \frac{२}{३} - \frac{८ र^२}{९ य^२}\right\}^२ = \frac{य^४}{१६ र^४} + \frac{य^२}{३ र^२} - \frac{३२ र^२}{२७ य^२} + \frac{६४ र^४}{८१ य^४}$ ।

(८) $\left\{\frac{अ}{क} + \frac{क}{ग} + \frac{ग}{घ}\right\}^२ = \frac{अ^२}{क^२} + \frac{२ अ}{ग} + \frac{२ अग}{कघ} + \frac{क^२}{ग^२} + \frac{२ क}{घ} + \frac{ग^२}{घ^२}$ ।

(९) $\left\{\frac{अ}{क} य^२ - \frac{क}{ग} य + \frac{ग}{अ}\right\}^२$

$= \frac{अ^२}{क^२} य^४ - \frac{२ अ}{ग} य^३ + \left\{\frac{क^३ + २ ग^३}{कग^२}\right\} य^२ - \frac{२ क}{अ} य + \frac{ग^२}{अ^२}$ ।

(१०) $\left\{\frac{य^२}{र^२} + \frac{२ य}{ल} - \frac{२ र^२}{ल^२}\right\}^२ = \frac{य^४}{र^४} + \frac{४ य^३}{र^२ल} - \frac{८ यर^२}{ल^३} + \frac{४ र^४}{ल^४}$ ।

(११) $\left\{य^2 + अय + अ^2 + \frac{अ^3}{य - अ}\right\}^2 = \frac{य^6}{य^2 - २ अय + अ^2}$

$= य^4 + २ अय^3 + ३ अ^2य^2 + ४ अ^3य + ५ अ^4 + \frac{६ अ^6}{य} + \frac{७ अ^6}{य^2} +$

इत्यादि ।

(१२) $\left\{\frac{अ^3}{क^3} - \frac{२ अ^2}{कग} - \frac{२ अक}{ग^2} + \frac{क^3}{ग^3}\right\}^2$

$= \frac{अ^6}{क^6} - \frac{४ अ^5}{क^4ग} + \frac{१० अ^3}{ग^3} - \frac{४ अक^4}{ग^5} + \frac{क^6}{ग^6}$ ।

(१३) $\left\{\frac{१}{३}य^2 + \frac{१}{२}य - \frac{३}{४}\right\}^3 = \frac{१}{२७}य^6 + \frac{१}{६}य^5 - \frac{५}{८}य^3 + \frac{२७}{३२}य - \frac{२७}{६४}$ ।

(१४) $\left\{\frac{अय}{क} + \frac{क}{य}\right\}^3 = \frac{अ^3य^3}{क^3} + \frac{३ अय^2}{क} + \frac{३ कय}{अ} + \frac{क^3}{अ^3}$ ।

(१५) $\left\{\frac{अ}{क} - \frac{क}{अ}\right\}^4 = \frac{अ^4}{क^4} - \frac{४ अ^2}{क^2} + ६ - \frac{४ क^2}{अ^2} + \frac{क^4}{अ^4}$ ।

---

७ भिन्नपदों की मूलक्रिया ।

६८ । रीति । उद्दिष्ट पद के अंश का वर्गादिमूल लेओ वह मूल अभीष्टमूल का अंश है और छेद का वर्गादिमूल लेओ वह अभीष्टमूल का छेद है ।

यह रीति घातक्रिया की रीति से उलटी है इस से इस की उपपत्ति अति स्पष्ट है ।

उदा० (१) $\frac{२५ अ^4य^2}{४९ क^2र^2}$ इस का वर्गमूल क्या है?

न्यास। $\frac{२५ अ^{४}य^{२}}{४९ क^{२}र^{२}}$ इस का वर्गमूल $= \frac{२५ अ^{४}य^{२} \text{ इस का वर्गमूल}}{४९ क^{२}र^{२} \text{ इस का वर्गमूल}}$

$$= \frac{५ अ^{२}य}{७ कर} \text{ वा, } -\frac{५ अ^{२}य}{७ कर}।$$

उदा० (२) $\frac{अ^{२}}{क^{२}} + \frac{क^{२}}{अ^{२}} - २$ इस का वर्गमूल क्या है?

यहां (३५) वे प्रक्रम से मूल लेने के लिये न्यास।

$$\begin{array}{r|l} & \frac{अ^{२}}{क^{२}} - २ + \frac{क^{२}}{अ^{२}} \left(\frac{अ}{क} - \frac{क}{अ} \right. \\ & \frac{अ^{२}}{क^{२}} \\ \hline \frac{२ अ}{क} - \frac{क}{अ} \Big) & - २ + \frac{क^{२}}{अ^{२}} \\ & - २ + \frac{क^{२}}{अ^{२}} \\ \hline \end{array}$$

यहां वर्गमूल $\frac{अ}{क} - \frac{क}{अ}$ यह आया इस के धनर्णत्व को पलट देने से $\frac{क}{अ} - \frac{अ}{क}$ यह भी उस का वर्गमूल हैं।

अथवा उद्दिष्ट पद को सवर्णित कर के वर्गमूल लेने से भी यही बनते हैं।

जैसा $\frac{अ^{२}}{क^{२}} - २ + \frac{क^{२}}{अ^{२}}$ इस का वर्गमूल $= \frac{अ^{४} - २ अ^{२}क^{२} + क^{४}}{अ^{२}क^{२}}$ इस का वर्गमूल

$$= \pm \frac{अ^{२} - क^{२}}{अक} = \pm \left\{ \frac{अ}{क} - \frac{क}{अ} \right\} \text{। वा, } \frac{अ}{क} - \frac{क}{अ} \text{ और } \frac{क}{अ} - \frac{अ}{क}।$$

उदा० (३) $\frac{य^{६}}{२७} - \frac{य^{५}}{२ र} + \frac{१५ य^{४}}{८ र^{२}} - \frac{४०५ य^{२}}{६४ र^{४}} - \frac{७२९ य}{१२८ र^{५}} - \frac{७२९}{५१२ र^{६}}$ इस का घनमूल क्या है?

यहां (३६) वे प्रक्रम से मूल लेने के लिये न्यास ।

$$\frac{य^{६}}{२७}-\frac{य^{५}}{२र}+\frac{१५य^{४}}{८र^{२}}-\frac{४०५य^{२}}{६४र^{४}}-\frac{७२९य}{१२८र^{५}}-\frac{७२९}{५१२र^{६}}\left(\frac{य^{२}}{३}-\frac{३य}{२र}-\frac{९}{८र^{२}}\right.$$

$$\frac{य^{६}}{२७}$$

$$\left.\frac{य^{४}}{३}\right)-\frac{य^{५}}{२र}$$

$$\frac{य^{६}}{२७}-\frac{य^{५}}{२र}+\frac{९य^{४}}{४र^{२}}-\frac{२७य^{३}}{८र^{३}}=\left\{\frac{य^{२}}{३}-\frac{३य}{२र}\right\}^{३}$$

$$\left.\frac{य^{४}}{३}\right)-\frac{३य^{४}}{८र^{२}}$$

$$\frac{य^{६}}{२७}-\frac{य^{५}}{२र}+\frac{१५य^{२}}{८र^{२}}-\frac{४०५य^{२}}{६४र^{४}}-\frac{७२९य}{१२८र^{२}}-\frac{७२९}{५१२र^{६}}=\left\{\frac{य^{२}}{३}-\frac{३य}{२र}-\frac{९}{८र^{२}}\right\}^{३}$$

उदा० (४) $अ^{२}+य^{२}$ इस का विस्तार से वर्गमूल कहो ।

न्यास । $$अ^{२}+य^{२}\left(अ+\frac{य^{२}}{२अ}-\frac{य^{४}}{८अ^{३}}+\frac{य^{६}}{१६अ^{५}}\right.$$ इत्यादि ।

$$अ^{२}$$

$$\left.२अ+\frac{य^{२}}{२अ}\right)\quad +य^{२}$$

$$+य^{२}+\frac{य^{४}}{४अ^{२}}$$

$$\left.२अ+\frac{य^{२}}{अ}-\frac{य^{४}}{८अ^{३}}\right)\quad -\frac{य^{४}}{४अ^{२}}$$

$$-\frac{य^{४}}{४अ^{२}}-\frac{य^{६}}{८अ^{४}}+\frac{य^{८}}{६४अ^{६}}$$

$$\left.२अ+\frac{य^{२}}{अ}-\frac{य^{४}}{४अ^{३}}+\frac{य^{६}}{१६अ^{५}}\right)\quad +\frac{य^{६}}{८अ^{४}}-\frac{य^{८}}{६४अ^{६}}$$ इत्यादि ।

इस प्रकार से

$अ^{२} + य^{२}$ इस का वर्गमूल $अ + \frac{य^{२}}{२ अ} - \frac{य^{४}}{८ अ^{५}} + \frac{य^{६}}{१६ अ^{५}}$ इत्यादि है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\frac{१६ अ^{२}क^{४}}{२५ ग^{२}}$ इस का वर्गमूल $= \pm \frac{४ अक^{२}}{५ ग}$ ।

(२) $\frac{२७ अ^{३}य^{६}}{६४ क^{३}र^{९}}$ इस का घनमूल $= \frac{३ अय^{२}}{४ कर^{३}}$ ।

(३) $\frac{अ^{३} (क - ग)^{३}}{८ \ (अ - य)^{६}}$ इस का घनमूल $= \frac{अ \ (क - ग)}{२ (अ - य)^{२}}$ ।

(४) $\frac{य^{४} \ (अ - य)^{४}}{अ^{८} \ (अ + य)^{४}}$ इस का चतुर्घातमूल $= \pm \frac{य \ (अ - य)}{अ^{२} (अ + य)}$ ।

(५) $\frac{३२ अ^{१५}य^{१०}}{२४३ \ (अ + य)^{५} \ (य - २)^{१०}}$ इस का पञ्चघातमूल

$= \frac{२ अ^{३}य^{२}}{३ \ (अ + य) \ (य - २)^{२}}$ ।

(६) $\frac{४ य^{२} - १२ य + ९}{य^{२} + ८ य + १६}$ इस का वर्गमूल $= \frac{२ य - ३}{य + ४}$ ।

(७) $\frac{४ य^{२}}{२५ र^{२}} - \frac{८ य}{१५ र} + \frac{२० र}{२७ य} + \frac{२५ र^{२}}{८१ य^{२}}$ इस का वर्गमूल

$= \frac{२य}{५र} - \frac{२}{३} - \frac{५ र}{९ य}$ ।

(८) $८१ - \frac{५४ अ}{७} + \frac{९२७ अ^{२}}{२४५} - \frac{६ अ^{३}}{३५} + \frac{अ^{४}}{२५}$ इस का वर्गमूल

$= ९ - \frac{३ अ}{७} + \frac{अ^{२}}{५}$ ।

(९) $\frac{अ^४ + क^४}{अ^२क^२} + \frac{६(अ^२ + क^२)}{अक} + ११$ इस का वर्गमूल

$= \frac{अ^२ + क^२}{अक} + ३$ ।

(१०) $\left\{\frac{२य + ३}{३य + १}\right\}^२ + \left\{\frac{य + ५}{२य - ४}\right\}^२$ इस का वर्गमूल

$= \frac{५य^२ + ८य + १३}{६य^२ - १०य - ४}$

(११) $\frac{\frac{२}{य - १} - \frac{९}{य - २} + \frac{८}{य - ३}}{\frac{२५}{२(य - ३)} + \frac{९}{२(य - १)} - \frac{१६}{य - २}}$ इस का वर्गमूल $= \frac{य + १}{य + २}$ ।

(१२) $\frac{य^६}{१६र^६} - \frac{य^५}{२र^५} + \frac{५य^३}{र^३} - \frac{८य}{र} + ४$ इस का वर्गमूल

$= \frac{य^३}{४र^३} - \frac{य^२}{र^२} - \frac{२य}{र} + २$ ।

(१३) $य^४ + \frac{१६}{य^४} + ४\left\{य^३ + \frac{८}{य^३}\right\} + २८$ इस का वर्गमूल

$= य^२ + \frac{४}{य^२} + २\left\{य + \frac{२}{य}\right\} - २$ ।

(१४) $\frac{(य + १)^४}{(य + २)^४} + ४\frac{(य + १)^२}{(य + २)^२} - ८\frac{(य + २)^२}{(य + १)^२} + ४\frac{(य + २)^४}{(य + १)^४}$ इस का

वर्गमूल $= \frac{(य + १)^२}{(य + २)^२} - २\frac{(य + २)^२}{(य + १)^२} + २$ ।

(१५) $\frac{य^{८}}{र^{८}} + \frac{४ य^{५}}{र^{५}} + \frac{२८ र^{४}}{य^{४}} + \frac{३२ र^{१२}}{य^{१२}} + \frac{१६ र^{१६}}{य^{१६}}$ इस का वर्गमूल

$$= \frac{य^{४}}{र^{४}} + \frac{२ य}{र} - \frac{२ र^{२}}{य^{२}} + \frac{४ र^{५}}{य^{५}} + \frac{४ र^{८}}{य^{८}} ।$$

(१६) $\frac{८ य^{३}}{२७ र^{३}} - \frac{२ य}{र} + \frac{९ र}{२ य} - \frac{२७ र^{३}}{८ य^{३}}$ इस का घनमूल $= \frac{२ य}{३ र} - \frac{३ र}{२ य}$ ।

(१७) $२ + \cfrac{१}{४ - \cfrac{८४}{य + २० - \cfrac{१}{१२ + \cfrac{४९}{य - ४}}}}$ इस का वर्गमूल $= \frac{३ य + २}{२ य - १}$ ।

(१८) $\cfrac{१}{१ + \cfrac{६}{य - ३ + \cfrac{८}{३ य + \cfrac{१}{य}}}}$ इस का घनमूल $= \frac{य - १}{य + १}$ ।

(१९) $अ^{२} + अक$ इस का वर्गमूल $= अ + \frac{१}{२} क - \frac{क^{२}}{८ अ} + \frac{क^{३}}{१६ अ^{२}}$ — इत्यादि ।

(२०) $य^{३} + १$ इस का घनमूल $= य + \frac{१}{३ य^{२}} - \frac{१}{९ य^{५}} +$ इत्यादि ।

---

८ भिन्नसम्बन्धि प्रकीर्णक ।

छेदगम ।

६९ । परस्पर समान वा विषम दो पक्षों में यदि एक वा अनेक भिन्नपद हों तो जिस क्रिया से उन दो पक्षों का साम्य वा वैषम्य न

बिगाड़ के उन के छेद वा छेदों को उड़ा देते हैं उस क्रिया को छेदगम कहते हैं उस का प्रकार यह है।

उद्दिष्ट दो पक्षों में जो भिन्नपद होगा उस के छेद से वा अनेक भिन्नपद हों तो उन के छेदों के गुणनफल वा लघुतमापवर्त्य से उन दोनों पक्षों को गुण देओ। इस से सब छेद उड जाते हैं।

इस छेदगम से पक्षों का साम्य वा वैषम्य नहीं पलटता। इस की उपपत्ति दूसरी और पांचवी प्रत्यक्ष बात से स्पष्ट है।

उदा० (१) $य + \frac{य}{२} - \frac{य}{३} = \frac{३य}{४} + १०$ यहां छेदगम करो।

इस में छेदों का लघुतमापवर्त्य १२ है इस से दोनों उद्दिष्ट पक्षों को गुण देने से, $१२य + \frac{१२य}{२} - \frac{१२य}{३} = \frac{३६य}{४} + १२०$,

इस में प्रत्येक भिन्नपद को लघुतम रूप देने से,

$१२य + ६य - ४य = ९य + १२०$, सब छेद उड गये।

उदा० (२) $\frac{य}{६} + \frac{य+३}{४} = ५ - \frac{४य-७}{८}$ इस में छेदों को उड़ा देओ।

यहां पक्षों को २४ से गुण देने से,

$४य + ६य + १८ = १२० - १२य + २१$।

यहां जो भिन्नपद ऋण चिह्न से जुड़ा हुआ है उस के अंश के सब पदों का चिह्न पलट दिया है क्यों कि उस अंश को घटा देना है।

अथवा यदि उद्दिष्ट पक्षों को इस रूप में लिखो

$\frac{१}{६}य + \frac{१}{४}(य + ३) = ५ - \frac{१}{८}(४य - ७)$

और फिर इन को २४ से गुण देओ

$४य + ६(य + ३) = १२० - ३(४य - ७)$

अर्थात्, $४य + (६य + १८) = १२० - (१२य - २१)$

और (२४) वे प्रक्रम से कोष्ठों को उड़ा देओ

$$४ य + ६ य + १८ = १२० - १२ य + २१$$

तो भी पहिले जैसे छेदगम से पक्ष हुए थे वैसे हि हुए ।

७० । इस प्रक्रम में विषम पक्षों के छेदगम के कुछ उदाहरण लिखते हैं । इन में य, र इत्यादि अक्षर धन संख्याओं के द्योतक जानो ।

उदा॰ (१) यह सिद्ध करो कि $\frac{य}{र} + \frac{र}{य}$ यह सर्वदा २ से बड़ा होता है ।

यहां $\frac{य}{र} + \frac{र}{य} >$ वा < २

छेदगम से, $य^2 + र^2 >$ वा $< २ यर$

परंतु (३७) वे प्रक्रम में सिद्ध किया है कि

$$य^2 + र^2 > २ यर$$

$\therefore$ $\frac{य}{र} + \frac{र}{य} > २$ यह सिद्ध हुआ ।

इस से स्पष्ट है कि कोइ भिन्नपद और उस का व्यस्तपद अर्थात् उस का १ में भाग देने से जो लब्ध होगा इन दोनों का योग कभी २ से छोटा नहीं हो सकता ।

(२) यह सिद्ध करो कि $\frac{य^2}{र} + \frac{र^2}{य}$ यह $य + र$ इस से अधिक होता है ।

यहां, $\frac{य^2}{र} + \frac{र^2}{य} >$ वा $< य + र$

छेदगम से, $य^3 + र^3 >$ वा $< यर (य + र)$

वा, $(य^2 - यर + र^2)(य + र) >$ वा $< यर (य + र)$

$\therefore$ $य^2 - यर + र^2 >$ वा $< यर$

पक्षान्तरनयन से $य^2 + र^2 >$ वा $< २ यर$

परन्तु $य^2 + र^2 > २ यर$

$\therefore \frac{य^2}{र} + \frac{र^2}{य} > य + र$ यह सिद्ध हुआ ।

(३) यह सिद्ध करो कि $\frac{यर}{य+र}$ यह $\frac{य+र}{४}$ इस से न्यून होता है ।

न्यास । $\frac{यर}{य+र} >$ वा $< \frac{य+र}{४}$

छेदगम से, $४यर >$ वा $< य^2 + २यर + र^2$

पक्षान्तरनयन से, $२यर >$ वा $< य^2 + र^2$

परन्तु $२यर < य^2 + र^2$, $\therefore \frac{यर}{य+र} < \frac{य+र}{४}$ यह सिद्ध हुआ ।

इस से यह स्पष्ट है कि किसी राशि के विषम दो भागों के गुणनफल में उसी राशि का भाग देने से जो लब्ध होगा वह उस राशि के चतुर्थांश से सर्वदा न्यून होता है ।

उदा० (४) $\frac{य}{र}, \frac{ल}{व}, \frac{श}{प}$ और $\frac{स}{ह}$ ये चार (धन) भिन्नपद हैं तो यह सिद्ध करो कि $\frac{य+ल+श+स}{र+व+प+ह}$ यह पद उन चार पदों में जो सब से बड़ा हो उस से छोटा होगा और जो सब से छोटा हो उस से बड़ा होगा ।

यहां कल्पना करो कि उन चार पदों में सब से छोटा पद $\frac{य}{र}$ है और सब से बड़ा पद $\frac{स}{ह}$ है और मानो कि इन दोनों पदों के द्योतक क्रम से त और थ हैं ।

तब, $\frac{य}{र} = त$, $\frac{ल}{व} > त$, $\frac{श}{प} > त$ और $\frac{स}{ह} > त$

और $\frac{य}{र} < थ$, $\frac{ल}{व} < थ$, $\frac{श}{प} < थ$ और $\frac{स}{ह} = थ$

$\therefore$ $य = तर$, $ल > तव$, $श > तप$ और $स > तह$

और $य < थर$, $ल < थव$, $श < थप$ और $स = थह$

जब कि सब बड़े पदों का योग छोटे पदों के योग से बड़ा होता है

$\therefore$ य + ल + श + स > त (र + व + ष + ह)

और य + ल + श + स < थ (र + व + ष + ह)

$\therefore \frac{\text{य}+\text{ल}+\text{श}+\text{स}}{\text{र}+\text{व}+\text{ष}+\text{ह}}$ > त और < थ । यह सिद्ध हुआ ।

इस उदाहरण में जो चार भिन्नपदों का गुण दिखलाया हैं वही दो आदि अनेक पदों में भी रहता है और यह इसी ऊपर दिखलाई हुई युक्ति से सिद्ध होता है ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) यह सिद्ध करो कि $\frac{\text{य}^2+\text{र}^2}{\text{य}^2-\text{र}^2}$ यह सर्वदा $\frac{\text{य}+\text{र}}{\text{य}-\text{र}}$ इस से छोटा होता है जो य से र छोटा हो ।

(२) यह सिद्ध करो कि $\frac{\text{य}}{\text{र}^2}+\frac{\text{र}}{\text{य}^2}$ यह $\frac{1}{\text{य}}+\frac{1}{\text{र}}$ इस से बड़ा होता है जो य = र न हो ।

(३) यह सिद्ध करो कि $\frac{\text{य}^2}{\text{र}^2}+\frac{\text{र}^2}{\text{य}^2}$ यह $\frac{\text{य}}{\text{र}}+\frac{\text{र}}{\text{य}}$ इस से बड़ा होता है जो य = र न हो । अर्थात् कोइ भिन्नपद और उस का व्यस्तपद इन के योग से उन के वर्गों का योग सदा बड़ा होता है ।

(४) यह सिद्ध करो कि $\frac{\text{य}^3}{\text{र}^3}+\frac{\text{र}^3}{\text{य}^3}$ यह $\frac{\text{य}^2}{\text{र}^2}+\frac{\text{र}^2}{\text{य}^2}$ इस से बड़ा होता है जो य = र न हो ।

७१ । इस प्रक्रम में भिन्नपद संबन्धि कितने एक उपयोगि सिद्धान्त लिखते हैं ।

पहिला सिद्धान्त । जो $\frac{\text{य}}{\text{र}}=\frac{\text{ल}}{\text{व}}$ हो तो $\frac{\text{य}+\text{र}}{\text{य}-\text{र}}=\frac{\text{ल}+\text{व}}{\text{ल}-\text{व}}$ होगा ।

इस की उपपत्ति ।

जब कि $\frac{य}{र} = \frac{ल}{व}$ तब (१८) वे प्रक्रम की दूसरी प्रत्यक्ष बात से

$$\frac{य}{र} + १ = \frac{ल}{व} + १, \text{ अर्थात् } \frac{य + र}{र} = \frac{ल + व}{व} ।$$

और $\frac{य}{र} - १ = \frac{ल}{व} - १$, अर्थात् $\frac{य - र}{र} = \frac{ल - व}{व}$ ।

इस लिये उसी प्रत्यक्ष बात से

$$\frac{य + र}{र} \div \frac{य - र}{र} = \frac{ल + व}{व} \div \frac{ल - व}{व}$$

अर्थात् $\frac{य + र}{र} \times \frac{र}{य - र} = \frac{ल + व}{व} \times \frac{व}{ल - व}$

$\therefore \quad \frac{य + र}{य - र} = \frac{ल + व}{ल - व}$ । यह सिद्ध हुआ।

अनुमान। जो $\frac{य + र}{य - र} = \frac{ल + व}{ल - व}$ हो तो $\frac{य}{र} = \frac{ल}{व}$ होगा।

इस की युक्ति ऊपर के प्रकार के विलोम विधि से स्पष्ट है।

दूसरा सिद्धान्त। जो $\frac{य}{र} = \frac{ल}{व}$ हो तो $\frac{अय + कर}{गय + घर} = \frac{अल + कव}{गल + घव}$

और $\frac{अय - कर}{गय - घर} = \frac{अल - कव}{गल - घव}$ ।

इस की उपपत्ति।

जब कि $\frac{य}{र} = \frac{ल}{व}$ तब $\frac{अय}{कर} = \frac{अल}{कव}$

$\therefore \frac{अय}{कर} + १ = \frac{अल}{कव} + १$ अर्थात् $\frac{अय + कर}{कर} = \frac{अल + कव}{कव}$ ।

इसी प्रकार सिद्ध होता है कि $\frac{गय + घर}{घर} = \frac{गल + घव}{घव}$ ।

अब (१८) वे प्रम की दूसरी प्रत्यक्ष बात से,

$$\frac{अय + कर}{कर} \div \frac{गय + घर}{घर} + \frac{अल + कव}{कव} \div \frac{गल + घव}{घव} ।$$

अर्थात् $\frac{अय + कर}{कर} \times \frac{घर}{गय + घर} = \frac{अल + कव}{कव} \times \frac{घव}{गल + घव}$ ।

$\therefore \frac{घ\ (अय + कर)}{क\ (गय + घर)} = \frac{घ\ (अल + कव)}{क\ (गल + घव)}$

अर्थात् $\frac{अय + कर}{गय + घर} = \frac{अल + कव}{गल + घव}$ यह सिद्ध हुआ।

इसी प्रकार से जहां ऊपर दोनों पक्षों में १ जोड़ दिया है वहां १ घटा देने से यह सिद्ध होता है कि $\frac{\text{अय}-\text{कर}}{\text{गय}-\text{घर}}=\frac{\text{अल}-\text{कव}}{\text{गल}-\text{घव}}$।

अनुमान। इसी ऊपर की युक्ति से यह भी तुरंत सिद्ध होता है कि जो $\frac{\text{य}}{\text{र}}=\frac{\text{ल}}{\text{व}}$ हो तो,

$$\frac{\text{अय}+\text{कर}}{\text{गय}-\text{घर}}=\frac{\text{अल}+\text{कव}}{\text{गल}-\text{घव}}\text{।}$$

और $$\frac{\text{अय}-\text{कर}}{\text{गय}+\text{घर}}=\frac{\text{अल}-\text{कव}}{\text{गल}+\text{घव}}\text{।}$$

तीसरा सिद्धान्त। भिन्नपद के अंश और छेद इन दोनों को किसी एक हि पद से गुण देओ वा भाग देओ तो भी उस भिन्नपद का मान बिगड़ता नहीं। यों पहिले (५८) वे प्रक्रम में दिखलाया है परंतु कोइ एक हि पद जोड़ देओ वा घटा देओ तो ऐसी स्थिति नहीं रहती सो इस प्रकार से

(१) किसी (धन) भिन्नपद के अंश और छेद इन दोनों में जो कोइ एक हि (धन) पद जोड़ देओ तो अंश से छेद जैसा बड़ा वा छोटा होगा उस के अनुसार उस भिन्नपद का मान बड़ा वा छोटा होगा।

इस की उपपत्ति।

मानो कि $\frac{\text{य}}{\text{र}}$ यह भिन्नपद है और अ और कोइ पद है।

अब जानना चाहिये कि $\frac{\text{य}+\text{अ}}{\text{र}+\text{अ}}$ यह $\frac{\text{य}}{\text{र}}$ इस से बड़ा वा छोटा है

अर्थात् $\frac{\text{य}+\text{अ}}{\text{र}+\text{अ}} >$ वा $< \frac{\text{य}}{\text{र}}$

छेदगम से, $\text{यर}+\text{अर} >$ वा $< \text{यर}+\text{अय}$

$\therefore$ $\text{अर} >$ वा $< \text{अय}$

अर्थात् $\text{र} >$ वा $< \text{य}$

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि र जैसा य से बड़ा वा छोटा होगा उस के अनुसार $\frac{\text{य}+\text{अ}}{\text{र}+\text{अ}}$ यह $\frac{\text{य}}{\text{र}}$ इस से बड़ा वा छोटा होगा यों सिद्ध हुआ।

(२) किसी (धन) भिन्नपद के अंश और छेद इन दोनों में जो कोइ एक हि (धन) पद घटा देओ तो अंश जैसा छेद से बड़ा वा छोटा होगा उस के अनुसार उस भिन्नपद का मान बड़ा वा छोटा होगा ।

इस की उपपत्ति ।

मानो कि $\frac{य}{र}$ एक भिन्नपद है और अ यह कोइ पद य और र इन दोनों से छोटा है ।

तब, $\frac{य - अ}{र - अ} > वा < \frac{य}{र}$

छेदगम से, $यर - अर > वा < यर - अय$

पक्षान्तरनयन से, $अय > वा < अर$

अर्थात् $य > वा < र$

इस से स्पष्ट है कि य जैसा र से बड़ा वा छोटा हो उस के अनुसार $\frac{य - अ}{र - अ}$ यह $\frac{य}{र}$ इस से बड़ा वा छोटा होगा । यों उपपन्न हुआ ।

चौथा सिद्धान्त । किसी भिन्न राशि के वर्गादिक घात भिन्न हि होते हैं ।

इस की उपपत्ति ।

मानो कि उद्दिष्ट भिन्न राशि का लघुतम रूप $\frac{अ}{क}$ है अर्थात् इस में अ और क ये परस्पर दृढ हैं तो (४५) वे प्रक्रम के चौथे अनुमान से $अ^2$ $अ^3$, $अ^4$ इत्यादि प्रत्येक $क^2$, $क^3$, $क^4$ इत्यादिकों से दृढ होंगे । इस लिये $\frac{अ^2}{क^2}$, $\frac{अ^3}{क^3}$, $\frac{अ^4}{क^4}$ इत्यादिक सब भिन्न हि होंगे । यों उपपन्न हुआ ।

७२ । इस प्रक्रम में घातमापकों से गणितप्रकार दिखलाये हैं ।

(१) $अ^4$ इस में अ का भाग दिये जाओ तो यह नीचे लिखी हुई पदों की पंक्ति उत्पन्न होती है ।

$$अ^4,\ अ^3,\ अ^2,\ अ,\ १,\ \frac{१}{अ},\ \frac{१}{अ^2},\ \frac{१}{अ^3},\ \frac{१}{अ^4}\ \ldots\ \ldots$$

यहां पहिले तीन पदों के घातमापक उत्तरोत्तर एक एक कर के न्यून होते गये हैं इसी क्रम से चतुर्थ आदि पदों को लिखने से उन का दूसरा रूप बनेगा ।

सो ऐसा $\overset{4}{अ},\ \overset{3}{अ},\ \overset{2}{अ},\ \overset{1}{अ},\ \overset{0}{अ}\ \ \overset{-1}{अ}\ \overset{-2}{अ}\ \overset{-3}{अ}\ \overset{-4}{अ}\ \ldots\ \ldots$

अर्थात् अ, १, $\frac{१}{अ}$, $\frac{१}{अ^2}$, $\frac{१}{अ^3}$, $\frac{१}{अ^4}$ इत्यादिक पदों के क्रम से $अ^1$, $अ^0$, $\overset{-1}{अ}$, $\overset{-2}{अ}$, $\overset{-3}{अ}$, $\overset{-4}{अ}$ इत्यादिक रूपान्तर हैं ।

$$\therefore\ अ=\overset{1}{अ},\ १=\overset{0}{अ},\ \frac{१}{अ}=\overset{-1}{अ},\ \frac{१}{अ^2}=\overset{-2}{अ},\ \frac{१}{अ^2}=\overset{-3}{अ},\ \frac{१}{अ^4}=\overset{-4}{अ},$$

इत्यादि ।

इस से यह जान पड़ता है कि जहां $अ^0$ ऐसा चिह्न आवेगा तहां उस का मान १ है अर्थात् हर एक राशि का शून्य घात १ होता है* ।

और इस से यह भी स्पष्ट सिद्ध होता है कि किसी पद के घातमापक का ऋण चिह्न पलट के उस को अंशस्थान से निकाल के छेदस्थान में वा छेदस्थान से निकाल के अंशस्थान में लिखने सकते हैं ।

---

* $अ^1$ = अ और $अ^0$ = १ ये दो रूप प्रकारान्तर से भी सिद्ध हो सकते हैं सो ऐसे जब कि १ को किसी पद से दो बार गुण देओ तो गुणनफल उस पद का द्विघात अर्थात् वर्ग होता है, तीन बार गुण देओ तो त्रिघात अर्थात् घन होता है, चार बार गुण देओ तो चतुर्घात होता है इत्यादि, तब इस से स्पष्ट है कि १ को अ से एक बार गुण देओ तो गुणनफल अ का एक घात होगा ।

परंतु १ × अ = अ $\therefore$ $अ^1$ = अ यों सिद्ध हुआ ।

इसी भांति १ को अ से शून्य बार गुण देओ अर्थात् किसी बार न गुणो तो स्पष्ट है कि १ ज्यों का त्यों बना रहेगा

इस लिये $अ^0$ = १

इस से यह भी तुरंत सिद्ध होता है कि 0^0 = १ अर्थात् शून्य का भी शून्यघात १ होता है ।

जैसा

(१) $\text{अ} = \frac{\text{अ}}{१} = \frac{\text{अ}^{१}}{१} = \frac{१}{\text{अ}^{-१}}$,

(२) $\text{अ}^{२} = \frac{\text{अ}^{२}}{१} = \frac{१}{\text{अ}^{-२}}$,

(३) $\frac{\text{अ}}{\text{क}^{२}} = \text{अक}^{-२} = \frac{१}{\text{अ}^{-१}\text{क}^{२}} = \frac{\text{क}^{-२}}{\text{अ}^{-१}}$

(४) $\text{अ}^{\text{न}} = \frac{१}{\text{अ}^{-\text{न}}}$, और $\frac{३}{\text{अ}^{\text{म}}} = ३\,\text{अ}^{-\text{म}}$,

(५) $\text{अ} + \text{क} = \frac{(\text{अ} + \text{क})^{१}}{१} = \frac{१}{(\text{अ} + \text{क})^{-१}}$,

(६) $(\text{अ} - \text{क})^{२} = \frac{१}{(\text{अ} - \text{क})^{-२}}$,

(७) $(\text{अ} + \text{य})^{\text{न}} = \frac{१}{(\text{अ} + \text{य})^{-\text{न}}}$,

(८) जब कि $\text{अ}^{\text{न}} = \text{अ} \times \text{अ} \times \text{अ} \times$ इत्या० न गुण्यगुणकरूप पद
और $\text{अ}^{\text{म}} = \text{अ} \times \text{अ} \times \text{अ} \times$ इत्या० म गुण्यगुणकरूप पद,
जब न और म संख्या धनात्मक और अभिन्न हैं,

तो $\text{अ}^{\text{न}} \times \text{अ}^{\text{म}} = \text{अ} \times \text{अ} \times$ इत्या० न गुण्यगुणकरूप पद $\times\, \text{अ} \times \text{अ} \times$ इत्या० म गुण्यगुणकरूप पद

$= \text{अ} \times \text{अ} \times \text{अ} \times$ इत्या० (न + म) गुण्यगुणकरूप पद

$=$ (७ वें प्रक्रम से) $\text{अ}^{\text{न}+\text{म}}$

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि किसी एक हि पद के दो घातों का गुणनफल उसी पद का वह घात होता है जिस का घातमापक उन गुण्यगुणकरूप घातों के घातमापकों के योग के समान है ।

(३) जब कि $अ^{न}$ = अ × अ × अ × इत्या० न गुण्यगुणकरूप पद

और $अ^{म}$ = अ × अ × अ × इत्या० म गुण्यगुणकरूप पद

जब न और म ये दोनों धन और अभिन्न संख्या हैं,

तो, $अ^{न} \div अ^{म} = \frac{अ^{न}}{अ^{म}} = \frac{\text{अ × अ × अ × इत्या० न गुण्यगुणकरूप पद}}{\text{अ × अ × अ × इत्या० म गुण्यगुणकरूप पद}}$

= अ × अ × इत्या० (न − म) गुण्यगुणकरूप पद

यदि न से म छोटा होवे

$= अ^{न-म}$

वा, $= \frac{१}{\text{अ × अ × इत्या० (म − न) गुण्यगुणकरूप पद}}$

यदि म से न छोटा हो

$= \frac{१}{अ^{म-न}} = अ^{-(म-न)} = अ^{न-म}$

इस से स्पष्ट है कि यदि भाज्य और भाजक क्रम से किसी एक हि पद के घात हों तो भजनफल भी उसी पद का घात होता है जिस का घातमापक भाजक के घातमापक को भाज्य के घातमापक में घटा देने से जो शेष बचे उस के समान होता है ।

(४) यदि किसी एक पद के दो घातों के घातमापकों में एक वा दोनों ऋण हों तो भी उन का गुणन में और भागहार में सवर्णन क्रम से इस प्रक्रम के (२) रे और (३) रे प्रकार से बनता है ।

जैसा

(१) $अ^{न} \times अ^{-म} = अ^{न-म}$ ।

(२) $अ^{-न} \times अ^{-म} = अ^{-(न+म)}$ ।

(३) $अ^{न} \div अ^{-म} = अ^{न+म}$ ।

(४) $अ^{-न} \div अ^{-म} = अ^{-(न-म)}$ ।

क्योंकि, $अ^{न} \times अ^{-म} = \frac{अ^{न}}{अ^{म}} = अ^{न-म}$,

$$अ^{-न} \times अ^{-म} = \frac{१}{अ^{न} \times अ^{म}} = \frac{१}{अ^{न+म}} = अ^{-(न+म)},$$

$$अ^{न} \div अ^{-म} = \frac{अ^{न}}{अ^{-म}} = अ^{न} \times अ^{म} = अ^{न+म},$$

और, $अ^{-न} \div अ^{-म} = \frac{अ^{-न}}{अ^{-म}} = \frac{अ^{म}}{अ^{न}} = अ^{-(न-म)}$,

(५) जब कि $अ^{न}$ इस का म घात $= (अ^{न})^{म}$

$= अ^{न} \times अ^{न} \times अ^{न} \times$ इत्या० म गुण्यगुणकरूप पद

$= अ^{न+न+न+ \text{ इत्या० मपद}}$ इस प्रक्रम के (२) रे प्रकार से

$= अ^{न \times म} = अ^{नम}$

तो इस से सिद्ध होता है कि उद्दिष्टपद का अभीष्ट घात वही पद है जिस का घातमापक उद्दिष्टपद का घातमापक और अभीष्ट-घातमापक इन के गुणनफल के समान है और जिस में मूलपद वही है जो उद्दिष्टपद में है ।

(६) जब कि $अ^{न}$ इस का म घात $अ^{नम}$ यह है तो $अ^{नम}$ इस का मघातमूल $अ^{न}$ यही होगा ।

अर्थात् ऐसा फलित हुआ कि $\sqrt[म]{अ^{नम}} = अ^{न} = अ^{नम \div म}$ ।

इस से सिद्ध होता है कि उद्दिष्टपद का अभीष्टमूल वही पद है जिस का घातमापक उद्दिष्टपद के घातमापक में अभीष्टमूलमापक का भाग देने से लब्ध होता है और जिस में मूलपद वही है जो उद्दिष्टपद में है ।

जैसा

(१) $\sqrt{अ^{१०}} = अ^{\frac{१०}{२}} = अ^{५}$ ।

(२) $\sqrt[३]{अ^{६}} = अ^{\frac{६}{३}} = अ^{३}$ ।

(३) $\sqrt[४]{अ^{८}} = अ^{\frac{८}{४}} = अ^{२}$,

(४) $\sqrt[७]{अ^{७}} = अ^{\frac{७}{७}} = अ^{१}, = अ,$

इसी क्रम से $\sqrt{अ} = \sqrt{अ^{१}} = अ^{\frac{१}{२}}$,

$\sqrt[३]{अ} = अ^{\frac{१}{३}}$, $\sqrt[४]{अ} = अ^{\frac{१}{४}}$, $\sqrt[न]{अ} = अ^{\frac{१}{न}}$, $\sqrt[३]{अ^{२}} = अ^{\frac{२}{३}}$,

$\sqrt[४]{अ^{३}} = अ^{\frac{३}{४}}$, $\sqrt[म]{अ^{न}} = अ^{न \div म} = अ^{\frac{न}{म}}$,

इस से यह स्पष्ट प्रकाशित होता है कि घातमापक का छेद मूलमापक है ।

(७) यदि एक हि पद के दो घातों के घातमापक भिन्न हों तो भी उन का गुणन में और भागहार में सवर्णन क्रम से इस प्रक्रम के (२) रे और (३) रे प्रकार से होता है ।

जैसा $अ^{\frac{प}{फ}} \times अ^{\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{प}{फ}+\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पभ+फब}{फभ}}$

और $अ^{\frac{प}{फ}} \div अ^{\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{प}{फ}-\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पभ-फब}{फभ}}$ ।

यहां प, फ, ब और भ इन की संख्या अभिन्न हैं ।

इस की युक्ति यह है ।

माना कि $अ^{\frac{प}{फ}} = य$, और $अ^{\frac{ब}{भ}} = र$,

तो इस प्रक्रम के (५) वे प्रकार से

$\left(अ^{\frac{प}{फ}}\right)^{फ} = य^{फ}$, वा $अ^{प} = य^{फ}$ ।

और $\left(अ^{\frac{ब}{भ}}\right)^{भ} = र^{भ}$, वा $अ^{ब} = र^{भ}$ ।

और $\therefore अ^{पभ} = य^{फभ}$, और $अ^{फब} = र^{फभ}$ ।

$\therefore अ^{पभ} \times अ^{फब} = य^{फभ} \times र^{फभ}$; वा $अ^{पभ + फब} = (यर)^{फभ}$ ।

$\therefore$ इस प्रक्रम के (६) वे प्रकार से, यर वा $अ^{\frac{प}{फ}} \times अ^{\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पभ + फब}{फभ}}$ ।

इसी भांति $अ^{पभ} \div अ^{फब} = य^{फभ} \div र^{फभ}$ अथवा इस प्रक्रम के (३) रे प्रकार से $अ^{पभ - फब} = \left(\frac{य}{र}\right)^{फभ}$

$\therefore$ इस प्रक्रम के (६) वे प्रकार से $\frac{य}{र}$ वा $अ^{\frac{प}{फ}} \div अ^{\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पभ - फब}{फभ}}$

(८) यह सिद्ध करो कि $\left(अ^{\frac{प}{फ}}\right)^{\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पब}{फभ}}$

माना कि $अ^{\frac{प}{फ}} = य$, तो $अ^{प} = य^{फ}$, और $अ^{पब} = य^{फब}$ ।

$\therefore अ^{\frac{पब}{फभ}} = य^{\frac{फब}{फभ}} = य^{\frac{ब}{भ}} = \left(अ^{\frac{प}{फ}}\right)^{\frac{ब}{भ}}$, वा $\left(अ^{\frac{प}{फ}}\right)^{\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पब}{फभ}}$ ।

इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि इस प्रक्रम के (५) वे प्रकार में जो $\left(अ^{न}\right)^{म} = अ^{नम}$, यह सवर्णन किया है इस में न और म की संख्या धन वा ऋण वा अभिन्न वा भिन्न होवे ।

अब इस प्रक्रम की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण लिखते हैं ।

(१) $अ^{\frac{प}{फ}} \times अ^{-\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पभ-फब}{फभ}} = \frac{१}{अ^{\frac{फब-पभ}{फभ}}}$ ।

(२) $अ^{-\frac{प}{फ}} \times अ^{-\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{-पभ-फब}{फभ}} = \frac{१}{अ^{\frac{पभ+फब}{फभ}}}$ ।

(३) $अ^{\frac{प}{फ}} \div अ^{-\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पभ+फब}{फभ}} = \frac{१}{अ^{-\frac{पभ+फब}{फभ}}}$ ।

(४) $अ^{-\frac{प}{फ}} \div अ^{-\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{बफ-पभ}{फभ}} = \frac{१}{अ^{\frac{पभ-बभ}{फभ}}}$ ।

(५) $\left(अ^{-\frac{प}{फ}}\right)^{\frac{ब}{भ}} = अ^{-\frac{पब}{फभ}}, \left(अ^{\frac{प}{फ}}\right)^{-\frac{ब}{भ}} = अ^{-\frac{पब}{फभ}}$, और $\left(अ^{-\frac{प}{फ}}\right)^{-\frac{ब}{भ}} = अ^{\frac{पब}{फभ}}$

और भी, $अ^{प} \times अ^{फ} \times अ^{ब} = अ^{प+फ+ब}$

(६) $अ^{प} \times अ^{-फ} \times अ^{-ब} = अ^{प-फ-ब}$

(७) $(अ^{प} \div अ^{फ}) \div अ^{-ब} = अ^{प-फ} \div अ^{-ब} = अ^{प-फ+ब}$,

(८) $\left(\left(अ^{प}\right)^{फ}\right)^{ब} = अ^{पफब}$ और $\left\{\left(अ^{प}\right)^{-फ}\right\}^{ब} = अ^{-पफब} = \frac{१}{अ^{पफब}}$ ।

(९) $\sqrt[ब]{\sqrt[फ]{\sqrt[प]{अ}}} = \left\{\left(अ^{\frac{१}{प}}\right)^{\frac{१}{फ}}\right\}^{\frac{१}{ब}} = अ^{\frac{१}{प}\times\frac{१}{फ}\times\frac{१}{ब}} = अ^{\frac{१}{पफब}} = \sqrt[पफब]{अ}$

(१०) $(अ^{प}क^{फ})^{ब} = अ^{पब}क^{फब}$ और $(अ^{प}क^{फ})^{\frac{१}{ब}} = अ^{\frac{प}{ब}}क^{\frac{फ}{ब}}$ ।

७३ । इस में कुछ उपयोगि गणित प्रकार दिखलाते हैं जो साधारण रीति से उत्पन्न होते हैं ।

(१) $\frac{य-र}{य-र}=१, \frac{य^{२}-र^{२}}{य-र}=य+र, \frac{य^{३}-र^{३}}{य-र}=य^{२}+यर+र^{२}$, इत्यादि ।

तो इस से यह जान पडता है कि $य^{म}-र^{म}$ यह $य-र$ इस से निःशेष होगा जो म संख्या धनात्मक और अभिन्न हो । अर्थात्

$$\frac{य^{म}-र^{म}}{य-र} = य^{म-१} + य^{म-२}र + य^{म-३}र^{२} + इत्या० + यर^{म-२} + र^{म-१}$$

(२) जब कि $\frac{य+र}{य+र}=१$,

$$\frac{य^{२}+र^{२}}{य+र} = य-र+\frac{२र^{२}}{य+र},$$

$$\frac{य^{३}+र^{३}}{य+र} = य^{२}-यर+र^{२},$$

$$\frac{य^{४}+र^{४}}{य+र} = य^{३}-य^{२}र+यर^{२}-र^{३}+\frac{२र^{४}}{य+र},$$

$$\frac{य^{५}+र^{५}}{य+र} = य^{४}-य^{३}र+य^{२}र^{२}-यर^{३}+र^{४},$$

$$\frac{य^{६}+र^{६}}{य+र} = य^{५}-य^{४}र+य^{३}र^{२}-य^{२}र^{३}+यर^{४}-र^{५}+\frac{२र^{६}}{य+र}$$

इत्यादि ।

तो इस से स्पष्ट है यदि म यह कोई धनात्मक संख्या विषम हो तो $य^{म}+र^{म}$ यह य+र से निःशेष होगा । अर्थात्

$$\frac{य^{म}+र^{म}}{य+र}=य^{म-१}-य^{म-२}र+य^{म-३}र^{२}-\text{इत्यादि}-य^{म-२}+र^{म-१}$$

और जो म कोई धनात्मक संख्या सम हो तो $य^{म}+र^{म}$ इस में य+र का भाग देने से $२र^{म}$ यह शेष बचेगा इस लिये जो म कोई धनात्मक संख्या सम हो तो $य^{म}+र^{म}-२र^{म}$ वा $य^{म}-र^{म}$ यह य+र से निःशेष होगा । अर्थात्

$$\frac{य^{म}-र^{म}}{य+र}=य^{म-१}-य^{म-२}र+य^{म-३}र^{२}-\text{इत्या०}+यर^{म-२}-र^{म-१}\text{ ।}$$

७४ । यह स्पष्ट है कि जब कोई राशि घटते२ शून्य हो जाय तब फिर वह और नहीं घट सकता इस लिये ऐसे घटने को उस राशि का परम ह्रास कहते हैं । और जब कोई राशि बढ़ते२ ऐसा बढ़ जावे कि जिस की कोई इयत्ता अर्थात् परिमाण न कर सके तब उस की परम वृद्धि होगी । इस लिये ऐसे बढ़े हुए राशि को अनन्त राशि कहते हैं ।

जब किसी राशि का परम ह्रास हो जाता है तब उस को ० इस चिह्न से द्योतित करते हैं और जब कोई राशि अनन्त हो जाता है तब उस का मान दिखलाने के लिये ∞ यह चिह्न लिखते हैं ।

(१) $\frac{अ}{क}=ग$ इस में यदि अ का मान सर्वदा एकरूप रहे तो स्पष्ट है कि ज्यों२ क घटेगा त्यों२ ग बढ़ेगा इस लिये जो क का परम ह्रास होवे अर्थात् क शून्य होवे तो ग की परम वृद्धि अर्थात् ग अनन्त होगा ।

$\therefore \frac{अ}{0} = \infty$ और $\therefore अ = 0 \times \infty$ और $\frac{अ}{\infty} = 0$।

(२) जब कि $अ \times 0 = 0$, तो $\frac{0}{0} = अ$,

$\because 0 \times 0 = 0 \quad \therefore \frac{0}{0} = 0$,

और $\because \frac{अ}{0} = \infty \quad \therefore \frac{अ \times 0}{0 \times 0}$ वा, $\frac{0}{0} = \infty$।

और भी $\because \frac{अ}{0} = \infty \quad \therefore \frac{अ}{0} \div \frac{अ}{0} = \infty \div \infty$

अर्थात् $\frac{अ}{0} \times \frac{0}{अ}$, वा, $\frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty}$

इस से यह सिद्ध होता है कि $\frac{0}{0}$ इस का वा $\frac{\infty}{\infty}$ इस का मान कोइ सान्त अर्थात् परिच्छिन्न राशि वा शून्य वा अनन्त भी होता है।

(३) कभी २ भिन्न पद में किसी एक राशि का उत्थापन करने से उस भिन्न पद का रूप ऐसा $\frac{0}{0}$ वा $\frac{\infty}{\infty}$ ऐसा हो जाता है। क्योंकि उस के अंश और छेद में ऐसा एक खण्ड रहता है कि जिस का मान ० वा ∞ होवे। परन्तु $\frac{0}{0}$ वा $\frac{\infty}{\infty}$ इस पर से उस भिन्न पद के वास्तव मान का ज्ञान नहीं होता इस लिये अंश और छेद में जो खण्ड ० के वा ∞ के समान हो उस को छेंक देने से उस भिन्नपद के वास्तव मान का ज्ञान होगा। और वह खण्ड अंश और छेद का अपवर्तन है इस लिये वह (४८), वा (४९) वे प्रक्रम से स्पष्ट होगा।

इसी युक्ति से भास्कराचार्य जी ने लीलावती के खषड्विध में कहा है कि

खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ।

शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः॥

अविकृत एव ज्ञेय इति।

उदा० (१) $\frac{य^2 - ३य + २}{य^2 + य - ६}$ इस भिन्न पद का मान क्या है? जब य = २

यहां $\frac{य^2 - ३य + २}{य^2 + य - ६} = \frac{(य-१)(य-२)}{(य+३)(य-२)} = \frac{य-१}{य+३}$,

∴ $\frac{०}{०} = \frac{१}{५}$ यह उद्दिष्ट भिन्न पद का मान है ।

उदा० (२) $\frac{२य^3 - ७य^2 - ३य + १८}{३य^3 - १३य^2 + ८य + १२}$ इस का मान अलग २ कहो जब य = २ और ३ ।

यहां $\frac{२य^3 - ७य^2 - ३य + १८}{३य^3 - १३य^2 + ८य + १२} = \frac{२य+३}{३य+२}$

∴ $\frac{०}{०} = \frac{७}{८}$ जब य = २ और $\frac{०}{०} = \frac{९}{११}$ जब य = ३ ।

उदा० (३) $\frac{अ^म - य^म}{अ - य}$ इस का मान क्या है? जब य = अ । यहां
$\frac{अ^म - य^म}{अ - य} = अ^{म-१} + अ^{म-२}य + अ^{म-३}य^2 +$ इत्यादि $+ अय^{म-२} + य^{म-१}$

इस में जो अ और य के घातों के घातमापक क्रम से उत्तरोत्तर घटते और बढते हैं इस से स्पष्ट जान पड़ता है कि इस में पदों की संख्या म इतनी है । अब जो य = अ हो

तो $\frac{०}{०} = अ^{म-१} + अ^{म-१} + अ^{म-१} +$ इत्या० म पद $= म \cdot अ^{म-१}$ ।

उदा० (४) $\frac{(य-र)^2}{य^2 - र^2}$ इस का मान क्या है? जब य = र ।

यहां $\frac{(य-र)^2}{य^2 - र^2} = \frac{य-र}{य+र}$ ∴ $\frac{०}{०} = ०$

उदा० (५) $\frac{६य^2 + ५य - ६}{९य^2 - १२य + ४}$ इस का मान क्या है? जब य = $\frac{२}{३}$ ।

यहां $\frac{६य^2 + ५य - ६}{९य^2 - १२य + ४} = \frac{२य+३}{३य-२}$ ∴ $\frac{०}{०} = \infty$ ।

उदा० (६) $\dfrac{\dfrac{य+१}{य-३}+\dfrac{य-३}{य-२}}{\dfrac{य+२}{य-३}-\dfrac{य-३}{य-२}}$ इस का मान क्या है? जब य = ३ ।

यहां $\dfrac{\dfrac{य+१}{य-३}+\dfrac{य-३}{य-२}}{\dfrac{य+२}{य-३}-\dfrac{य-३}{य-२}} = \dfrac{२य^२-७य+७}{६य-१३}$, $\therefore \dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{४}{५}$ ।

दशमलव ।

७५ । जिस भिन्न संख्या का छेद दस का कोइ पूरा घात हो उस भिन्न संख्या को दशमलव कहते हैं और इस में छेद की संख्या नहीं लिखते किंतु उस को दिखलाने के लिये केवल छेद के घातमापक की जितनी संख्या होगी उतने अंश में एक स्थान से स्थान गिन के वहां पर ऐसा विन्दु करते हैं इस बिन्दु को दशमलव बिन्दु कहते हैं ।

जैसा $\frac{३}{१०}$ इस को .३ यों लिखते हैं ।

$\dfrac{३४}{१००}$ " .३४ "

$\dfrac{७७}{१०००}$ " .०७७ "

$\dfrac{३२७}{१००}$ " ३.२७ "

७६ । जब कि $\dfrac{२७}{१०} = \dfrac{२७०}{१००} = \dfrac{२७००}{१०००} = \cdots = \dfrac{२७\times१०^{त}}{१०^{त+१}}$

$\therefore$ २.७ = २.७० = २.७०० = ⋯ = २.७००००० ⋯ त शून्य ।

इस से यह स्पष्ट है कि दशमलव के ऊपर चाहो उतने शून्य देओ तो भी उस का मोल बिगड़ता नहीं ।

७७। जब कि

$$\frac{५९६४७}{१०००} = \frac{५००००}{१०००} + \frac{९०००}{१०००} + \frac{६००}{१०००} + \frac{४०}{१०००} + \frac{७}{१०००},$$

$$= ५० + ९ + \frac{६}{१०} + \frac{४}{१००} + \frac{७}{१०००},$$

$$\text{तो } ५९.६४७ = ५० + ९ + \frac{६}{१०} + \frac{४}{१०^२} + \frac{७}{१०^३},$$

इस से यह स्पष्ट प्रकाशित होता है कि दशमलव में दशमलव बिन्दु की बांईं ओर अभिन्न संख्या और दहिनी ओर भिन्न संख्या रहती है और भी इस में अभिन्न संख्या में जैसे बांईं ओर से दहिनी ओर उत्तरोत्तर अङ्कों के गुणक दशमांश दशमांश होते हैं वैसे हि आगे भिन्न संख्या में भी होते हैं अर्थात् दशमलव में अङ्कों की स्थिति वैसी हि रहती है जैसी अभिन्न संख्या में है। इसी लिये दशमलवों का संकलन और व्यवकलन उसी भांति बनाते हैं जैसा अभिन्न संख्याओं का एकादि स्थानों के अङ्कों के नीचे एकादि स्थानों के अङ्क लिख के बनाते हैं।

जैसा ९७०४.५०३	योज्य।	८०४.१९	वियोज्य।
२९१३.८४	योजक।	६२.३२५८	वियोजक।
१२६१८.३४३	योग।	७४१.८६४२	अन्तर।

७८। दशमलवों के गुणन आदि परिकर्मों की उपपत्ति।

मानो कि द और दं ये दो दशमलव हैं और इन में क्रम से त और तं ये दशमलवस्थान हैं और इन के दशमलव बिन्दु को मिटा देने से जो अभिन्न राशि बनेंगे वे क्रम से दा और दां हैं।

$$\text{तो } द = \frac{दा}{१०^{त}} \text{ और } दं = \frac{दां}{१०^{तं}}$$

$$(१) \text{ दशमलवों का गुणनफल} = ददं = \frac{दा}{१०^{त}} \times \frac{दां}{१०^{तं}} = \frac{दादां}{१०^{त+तं}}$$

इस लिये दशमलवों का गुणन अभिन्न संख्याओं के गुणन के नांई बनाते हैं और गुण्यगुणकों में जितने दशमलव होंगे उन के योग के समान गुणनफल में दशमलवस्थान करते हैं ।

जैसा

```
  ३४७.२४     गुण्य
   ९.०३६     गुणक
 ---------
   २०८३४४
  १०४१७२
 ३१२५१६
 ---------
 ३१३७.६६०६४  गुणनफल ।
```

(२) दशमलवों का भजनफल $= \frac{द}{द'} = \frac{दा}{१०^{त}} \div \frac{दा'}{१०^{त'}} = \frac{दा}{दा'} \times \frac{१०^{त'}}{१०^{त}}$ ।

इस में जैसा त' यह त से बड़ा वा इस के समान वा इस से छोटा होगा वैसा इस भजनफल का रूप अलग २ होगा ।

($अ_1$) यदि $त' > त$, तो $\frac{द}{द'} = \frac{द}{दा'} \times १०^{त'-त}$ ।

इस लिये दशमलवों के भजनफल के लिये उन का अभिन्न संख्याओं के नांई भजन करने से जो लब्धि अभिन्न होगी तो उस पर भाज्य के दशमलवस्थानों से भाजक के दशमलवस्थान जितने अधिक होंगे उतने शून्य देते हैं ।

```
        भाजक     भाज्य      भजनफल
जैसा    ३.७४८)  ९५९४८८.८  (२५६००
               ७४९६
              ------
               २०९८८
               १८७४०
              ------
                २२४८८
                २२४८८
               ------
                  ०
```

(अ$_2$) यदि तं = त, तेा, $\frac{द}{दं} = \frac{दा}{दां}$, इस लिये जिन के दशमलवस्थान परस्पर समान होंगे उन का अभिन्न संख्याओं के नाईं भजन करने से जो भजनफल पूरा आवेगा तेा उस में दशमलवस्थान नहीं करते ।

	भाजक	भाज्य	भजनफल
जैसा	१४.७६)	३४६४१.७२	(२३४७
		२९५२	
		५१२१	
		४४२८	
		६९३७	
		५९०४	
		१०३३२	
		१०३३२	
		०	

(अ$_3$) यदि तं < त, तेा $\frac{द}{दं} = \frac{दा}{दां} \times \frac{१}{१०^{त-तं}}$

इस लिये दशमलवात्मक भाज्यभाजकों को अभिन्न मान के भजन करने से यदि भजनफल निःशेष आवे तेा उस में उतने दशमलवस्थान करते हैं जितने भाजक के दशमलवस्थानों से भाज्य के अधिक हैं ।

	भाजक	भाज्य	भजनफल
जैसा	२४.५८)	८३.९९३२२	(३.४०९
		७३७४	
		१००५३	
		९८३२	
		२२१२२	
		२२१२२	
		०	

(अ$_४$) यदि दा यह दां से निःशेष न होवे अर्थात् दशमलवों का अभिन्न संख्याओं के नांईं भजन करने से यदि भाजक से भाज्य निःशेष न होवे तो भाज्य पर तब तक एक२ शून्य दे के उस में भाजक का भाग देते हैं जब तक भाज्य निःशेष होवे वा जब तक प्रयोजन होवे फिर भाजक और शून्यों से बढ़ा हुआ भाज्य इन पर से भजनफल में दशमलवस्थान करते हैं ।

$$\text{उ० (१)}\quad \frac{७३.५}{.०८} = \frac{७३.५०००}{.०८} = ९१८.७५ \text{ ।}$$

$$\text{उ० (२)}\quad \frac{३.२७}{६.२५} = \frac{३.२७००००}{६.२५} = .५२३२ \text{ ।}$$

$$\text{उ० (३)}\quad \frac{१.७}{.३} = \frac{१.७००००\cdots\cdot}{.३} = ५.६६६६\cdots\cdots \text{ ।}$$

$$\text{उ० (४)}\quad \frac{.८६२}{१.१} = \frac{.८६२००००००\cdots\cdot}{१.१} = .७८३६३६३६\cdots\cdots \text{ ।}$$

जिस दशमलव में एक हि एक संख्या उस के उपरान्त फिर२ वही आती है और कहीं रुकती नहीं उस दशमलव को आवर्त दशमलव कहते हैं और इस से दूसरे भांति का जो दशमलव है उस को परिच्छिन्न दशमलव वा अनावर्त कहते हैं ।

जैसा ऊपर के तीसरे और चौथे उदाहरण में भजनफल आवर्त दशमलव है ।

(३) जब कि $\text{द} = \frac{\text{दा}}{१०^{\text{त}}}$ तो $\text{द}^२ = \frac{\text{दा}^२}{१०^{२\text{त}}}$, $\text{द}^३ = \frac{\text{दा}^३}{१०^{३\text{त}}}$ इत्यादि ।

इस लिये दशमलव का वर्गादि घात अभिन्न संख्या के वर्गादि घातों के नांईं बना के उस में उतने दशमलवस्थान करते हैं जितनी मूल के दशमलवस्थान और घातमापक इन के गुणनफल की संख्या होवे ।

इसी की उलटी दशमलव के वर्गादिमूल निकालने की युक्ति है ।

७९ । भिन्न संख्या को दशमलव का रूप देने से वह दशमलव कहां परिच्छिन्न और कहां आवर्त होगा इस का बिचार ।

मानो कि $\frac{अ}{क}$ यह उद्दिष्ट भिन्न संख्या का लघुतमरूप है। अब इस के समान ऐसी एक भिन्न संख्या खोजनी चाहिये कि जिस का छेद दस का कोई पूरा घात होवे। सो ऐसा $\frac{अ}{क} = \frac{अ \times १०^{त}}{क \times १०^{त}} = \frac{ता}{१०^{त}}$ यह अभीष्ट दशमलव है जिस में दशमलव स्थान त हैं और ता यह अभिन्न संख्या है। अब ता $= \frac{अ \times १०^{त}}{क}$ इस में अ $\times १०^{त}$ यह क से अपवर्त्य है और अ यह क से दृढ है। इस लिये (४४) वे प्रक्रम से क से $१०^{त}$ यह अवश्य निःशेष होगा। परंतु $१०^{त}$ यह तो २ के वा ५ के घात से वा २ और ५ के घातों के गुणनफल से ही निःशेष होगा और किसी से नहीं होगा यह स्पष्ट है इस लिये जो क यह $२^{प} ५^{फ}$ इस रूप का हो अर्थात् $\frac{अ}{२^{प} ५^{फ}}$ यों किसी भिन्न संख्या का लघुतमरूप हो तो उस का दशमलव सान्त अर्थात् परिच्छिन्न होगा और इस से दूसरे भांति की भिन्न संख्या का दशमलवरूप आवर्त होगा। क्योंकि जब इस में क से अ $\times १०^{त}$ यह कभी निःशेष नहीं हो सकता तो ऐसे भजन में जब से भाज्य पर का एक एक शून्य हर एक शेष पर लिया जावेगा तब से विरूप अन्त्य भाज्यों की संख्या क$-$१ से अधिक नहीं हो सकती यह स्पष्ट है। इस लिये फिर भाग लेते२ वही अन्त्य भाज्य बनेगा जो एक बेर पहिले बना है और भजनफल में फिर वेही अङ्क आवेंगे जो पहिले आए हैं और ऐसे ही फिर २ आते जायेंगे ।

८० । आवर्त दशमलव का भिन्नाङ्करूप जानने का प्रकार ।

यह स्पष्ट है कि किसी आवर्त दशमलव का रूप यह है ।

$$\frac{अ}{१०^{त}}+\frac{क}{१०^{त+द}}+\frac{क}{१०^{त+२द}}+\frac{क}{१०^{त+३द}}+\dots\dots$$

इस में जो संख्या आवर्त दशमलव के आदि में रहती है और फिर नहीं आती उस का द्योतक अ है जो संख्या वही फिर २ आती है उस का द्योतक क है। और अ संख्या के एकस्थान का अङ्क पहिले से जिस दशमलव स्थान में होगा उस संख्या का द्योतक त है और क संख्या में जितने स्थान होंगे उन की संख्या का द्योतक द है। अब इस आवर्त दशमलव के समान जो दा यह भिन्न संख्या मानो तो

$$दा=\frac{अ}{१०^{त}}+\frac{क}{१०^{त+द}}+\frac{क}{१०^{त+२द}}+\frac{क}{१०^{त+३द}}+ इत्यादि$$

$$\therefore १०^{द}\times दा=\frac{१०^{द}\times अ}{१०^{त}}+\frac{क}{१०^{त}}+\frac{क}{१०^{त+द}}+\frac{क}{१०^{त+२द}}+\frac{क}{१०^{त+३द}}+ इत्यादि$$

समों में सम घटा देने से, $(१०^{द}-१)\, दा=\dfrac{(१०^{द}-१)\, अ+क}{१०^{त}}$,

$\therefore दा=\dfrac{(१०^{द}-१)\, अ+क}{१०^{त}(१०^{द}-१)}$ आवर्त दशमलव का भिन्न रूप जानने के लिये यह एक पक्ष है इस में अ, क, त, और द इन का उत्थापन करने से भिन्न रूप तुरन्त स्पष्ट होगा।

उदा० (१) ·५५५५ इत्या० इस का भिन्नरूप क्या है?

यहां अ = ०, क = ५, त = ०, और द = १

$$\therefore दा=\frac{(१०^{द}-१)\, अ+क}{१०^{त}(१०^{द}-१)}=\frac{(१०^{१}-१)\times ०+५}{१०^{०}\times(१०^{१}-१)}=\frac{५}{९}\text{ ।}$$

उदा० (२) ·०२७२७२७ इत्या० इस का भिन्नरूप क्या है?

यहां अ = ०, क = २७, त = १ और द = २

$$\therefore \text{दा} = \frac{(१०^{द} - १)\, अ + क}{१०^{त}\,(१०^{द} - १)} = \frac{(१०^{२} - १) \times ० + २७}{१०^{१}\,(१०^{२} - १)} = \frac{२७}{१० \times ९९}$$

$$= \frac{२७}{९९०} = \frac{३}{११०} \text{ ।}$$

उदा० (३) २·२३०७६९२३०७६९ इत्या० इस का भिन्नरूप क्या है?

यहां अ = २, क = २३०७६९, त = ० और द = ६,

$$\therefore \text{दा} = \frac{(१०^{द} - १)\, अ + क}{१०^{त}\,(१०^{द} - १)} = \frac{(१०^{६} - १) \times २ + २३०७६९}{१०^{०}\,(१०^{६} - १)}$$

$$= \frac{२२३०७६७}{९९९९९९} = \frac{२९}{१३} \text{ ।}$$

उदा० (४) ·७९३१३१३१ इत्या० इस का भिन्नरूप क्या है?

यहां अ = ७९, क = ३१, त = २, और द = २,

$$\therefore \text{दा} = \frac{(१०^{द} - १)\, अ + क}{१०^{त}\,(१०^{द} - १)} = \frac{(१०^{२} - १) \times ७९ + ३१}{१०^{२}\,(१०^{२} - १)}$$

$$= \frac{७८५२}{९९००} = \frac{१९६३}{२४७५} \text{ ।}$$

उदा० (५) १३·२२७४७७४७७४७ इत्या० इस का भिन्नरूप क्या है?

यहां अ = १३२२, क = ७४७, त = २ और द = ३,

$$\therefore \text{दा} = \frac{(१०^{द} - १)\, अ + क}{१०^{त}\,(१०^{द} - १)} = \frac{(१०^{३} - १) \times १३२२ + ७४७}{१०^{२}\,(१०^{३} - १)}$$

$$= \frac{१३२१४२५}{९९९००} = \frac{५८७३}{४४४} \text{ ।}$$

अध्याय ५ ।

इस में समीकरण का व्युत्पादन, एकवर्ण एकघातसमीकरण, अनेकवर्ण एकघातसमीकरण और एकघातसमीकरणसंबन्धि प्रश्न इतने प्रकरण हैं ।

---

१ समीकरण का व्युत्पादन ।

८१ । जो दो पक्षों का साम्य दिखलाता है उस को समीकरण कहते हैं उस में उन दोनों पक्षों को = इस चिह्न की दोनों ओर लिखते हैं । यह समीकरण दो प्रकार का । एक प्राकृत समीकरण और एक कल्पित समीकरण ।

(१) जिस समीकरण के दोनों पक्ष एकरूप होते हैं वा जिस के दोनो पक्षों को सवर्णित करने से वे एकरूप हो जाते हैं उस को प्राकृत समीकरण कहते हैं ।

जैसा । $अ + य = अ + य$,

अथवा $\frac{अ^2 - य^2}{अ + य} = अ - य$ ।

(२) विरूप समीकरण उस को कहते हैं जिस के दोनों पक्ष भिन्नरूप हैं और सवर्णित करने से भी एकरूप नहीं होते केवल उन के मान परस्पर समान कल्पना किये हैं उस को कल्पित समीकरण कहते हैं ।

जैसा । $य + अ = क$ इस का अर्थ यह है कि य एक ऐसी नियत संख्या है कि जिस में अ को जोड़ देने से योग क के समान होता है ।

(३) प्राकृत समीकरण के दोनो पक्षों का साम्य स्वाभाविक रहता है इस लिये उस के पद वा पदों के मान यथेष्टकल्प्य अर्थात् जो चाहो सो हो सकते हैं । और कल्पित समीकरण के दो पक्षों का साम्य

कल्पित होता है इस लिये उस के पद वा पदों के मान उस कल्पित साम्य के अनुसार नियत रहते हैं ।

(४) कल्पित समीकरण में अव्यक्तपद व्यक्तपदों से संबद्ध रहता है वहां जिस क्रिया से उस समीकरण के पक्षों का साम्य न बिगड़े और एक पक्ष में केवल अव्यक्तपद को और दूसरे पक्ष में सब व्यक्तपदों को कर देते हैं उस क्रिया को समक्रिया कहते हैं ।

(५) कल्पित समीकरण में अव्यक्त का मान वह है जिस से उस समीकरण में उत्थापन करने से वह समीकरण प्राकृत हो जावे अर्थात् उस के दोनों पक्ष एकरूप हो जावें ।

जैसा । य + अ = क, इस में य अव्यक्त है और अ और क ये व्यक्त-पद हैं । और यहां य का मान क − अ है क्योंकि उत्थापन से अर्थात् उद्दिष्ट समीकरण में य के स्थान में क − अ को रखने से क − अ + अ = क, वा, क = क यह प्राकृत समीकरण होता है ।

८२ । इस प्रक्रम में समीकरण के भेद कहते हैं ।

(१) जिस समीकरण में एकही अव्यक्त है उस को एकवर्ण समीकरण कहते हैं ।

(२) जिस में अनेक अव्यक्त हैं उस को अनेकवर्ण समीकरण कहते हैं ।

(३) छेदगम और यथासंभव अपवर्तन इत्यादि करने से समीकरण में अव्यक्त का जो घात सब से बड़ा रहता है उस घात के नाम का वह समीकरण कहलाता है । जैसा जो समीकरण में अव्यक्त का एक घात रहे तो उस को एकघातसमीकरण कहते हैं । जैसा य = अ । और जो समीकरण में अव्यक्त का सब से बड़ा घात वर्ग ही हो तो उस को वर्गसमीकरण कहते हैं । यह दो प्रकार का एक केवल वर्गसमीकरण और दूसरा मध्यमाहरण । जिस में अव्यक्त का वर्ग मात्र रहता है उस

को केवल वर्गसमीकरण कहते हैं और जिस में अव्यक्त का वर्ग औ उस का एक घात भी रहता है उस को मध्यमाहरण कहते हैं।

जैसे। अय^{२} + क = ०, यह केवल वर्गसमीकरण है।

और अय^{२} + कय = ग, यह मध्यमाहरण।

इसी भांति घनसमीकरण, चतुर्घातसमीकरण, इत्यादि जानो और भी साधारण रीति से।

$$य^{म} + तय^{म-१} + थय^{म-२} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + फय^{२} + बय + भ = ०$$

इस में अव्यक्त का सब से बड़ा घात $य^{म}$ यह है इस लिये इस को मघातसमीकरण कहते हैं।

---

२ एकवर्ण एकघातसमीकरण।

८३। जिस उद्दिष्ट समीकरण में अव्यक्त किसी सच्छेद पद में नहीं पड़ा है उस की समक्रिया।

रीति। उद्दिष्ट समीकरण में जितने अव्यक्त के पद होंगे उन सभों को पक्षान्तर नयन से = इस चिह्न की बांईं ओर के पक्ष में कर देओ और जितने व्यक्त पद होंगे उन को दहनी ओर की पक्ष में कर देओ। फिर उस अव्यक्त के पदों का और उन व्यक्त पदों का अलग२ योग करो। यों करने से बांईं ओर के पक्ष में अव्यक्त का जो वारद्योतक हो उस का दहनी ओर के पक्ष में भाग देने से उस अव्यक्त का मान लब्ध होता है।

भास्कराचार्य जी ने भी कहा है कि

एकाव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षा-
द्रूपाण्यन्यस्येतरस्माच्च पक्षात्।
शेषाव्यक्तेनोद्धरेद्रूपशेषं
व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः॥

इस में रूप कहिये व्यक्त पद।

इस में समीकरण के किसी पक्ष में यदि एक वा अनेक कोष्ठ हों तो उन को पहिले (२४) वे प्रक्रम से उडा के फिर ऊपर का विधि करो। और समक्रिया के समय में जब दोनो पक्षों में किसी का अपवर्त लगता हो तब लगा के फिर क्रिया को बढ़ाओ और (३७) वे प्रक्रम का पहिला और दूसरा अनुमान जहां पर लगे तहां उस को लगाओ।

यहां अव्यक्त को = इस चिह्न की बांई ओर करते हैं और व्यक्त पदों को दहनी ओर करते हैं इस लिये बांई ओर के पक्ष को अव्यक्त पक्ष और दहनी ओर के पक्ष को व्यक्त पक्ष कहते हैं।

उदा॰ (१) ७य + ३ = २य + २३, इस में य का मान क्या है?

पक्षान्तरनयन से, ७य − २य = २३ − ३

योग करने से, ५य = २०

भाग देने से, य = $\frac{२०}{५}$ = ४, यह मान है।

इस मान को उद्दिष्ट समीकरण में य के स्थान में रखने से

७ × ४ + ३ = २ × ४ + २३, वा, २८ + ३ = ८ + २३,

वा, ३१ = ३१ यह सरूप समीकरण हुआ इस लिये यहां जो य का मान ४ आया है यह ठीक है। इस अव्यक्त मान की सत्यता दिखलाने हारे प्रकार को प्रतीति कहते हैं।

उदा॰ (२) १२य − २१ = ३य + ३३, इस में य का मान क्या है?

यहां ३ का अपवर्त करने से, ४य − ७ = य + ११

पक्षान्तरनयन से, ४य − य = ११ + ७

योग करने से, ३य = १८

भाग देने से, य = $\frac{१८}{३}$ = ६।

उदा॰ (३) ४य − २ = ७य − ११, इस में य का मान क्या है?

पक्षान्तरनयन से, ४य − ७य = −११ + २

∴ −३य = −९

(३७) वे प्रक्रम के (१) अनुमान से, $३य = ९ \therefore य = \frac{९}{३} = ३$ ।

अथवा पहिले हि भाग देने से, $३य = \frac{-९}{-३} = ३$ ।

उदा० (४) $११य - (१३ - य) = ९५$, इस में य का मान क्या है ?

कोष्ठ को उड़ा देने से, $११य - १३ + य = ९५$

$$१२य = ९५ + १३$$

$$= १०८$$

भाग देने से, $य = \frac{१०८}{१२} = ९$ ।

उदा० (५) $५(य - ३) - ५१ = ५९ - २(१७ - २य)$, इस में य-का मान क्या है ?

यहां कोष्ठ के आदि में जो पद है उस से भीतर के पदों को गुण देने से, $(५य - १५) - ५१ = ५९ - (३४ - ४य)$

कोष्ठ को उड़ा देने से, $५य - १५ - ५१ = ५९ - ३४ + ४य$

पक्षान्तरनयन से, $५य - ४य = ५९ - ३४ + १५ + ५१$

$$य = १२५ - ३४ = ९१ ।$$

उदा० (६) $७य - ११(२य + ७) = ९य - ५(३य - १७)$, इस में य का मान क्या है ?

यहां $७य - (२२य + ७७) = ९य - (१५य - ८५)$

$\therefore ७य - २२य - ७७ = ९य - १५य + ८५$

पक्षान्तरनयन से, $७य - २२य - य - ९य + १५य = ८५ + ७७$

$\therefore -९य = १६२$ और $९य = -१६२ \therefore य = -\frac{१६२}{९} = -१८$ ।

अथवा $य = \frac{१६२}{-९} = -१८$ ।

उदा० (७) $कय - अ = ग - घय$, इस में य का मान क्या है ?

पक्षान्तरनयन से, $कय + घय = अ + ग$

$\therefore (क + घ) य = अ + ग$, और $य = \frac{अ + ग}{क + घ}$ ।

इस की प्रतीति के लिये य के स्थान में $\frac{\text{अ} + \text{ग}}{\text{क} + \text{घ}}$ को रखने से ।

$$\text{क}\left(\frac{\text{अ} + \text{ग}}{\text{क} + \text{घ}}\right) - \text{अ} = \text{ग} - \text{घ}\left(\frac{\text{अ} + \text{ग}}{\text{क} + \text{घ}}\right) ।$$

अथवा, $\frac{\text{अक} + \text{कग}}{\text{क} + \text{घ}} - \text{अ} = \text{ग} - \frac{\text{अघ} + \text{गघ}}{\text{क} + \text{घ}}$

अथवा, $\frac{\text{कग} - \text{अघ}}{\text{क} + \text{घ}} = \frac{\text{कग} - \text{अघ}}{\text{क} + \text{घ}}$ प्राकृत समी० हुआ ।

उदा० (८) $\text{अय}^2 + \text{अकय} = \text{अ}^2\text{य} - \text{अगय}^2$, इस में य का मान क्या है?

अय, का अपवर्त देने से, $\text{य} + \text{क} = \text{अ} - \text{गय}$

पक्षान्तरनयन से, $\text{य} + \text{गय} = \text{अ} - \text{क}$; वा, $(१ + \text{ग})\,\text{य} = \text{अ} - \text{क}$ ।

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{अ} - \text{क}}{१ + \text{ग}} ।$$

उदा० (९) $\text{अ}(\text{क} + \text{य}) - \text{क}(\text{ग} - \text{य}) = \text{ग}(\text{घ} + \text{य})$, इस में य का मान क्या है?

यहां $\text{अक} + \text{अय} - \text{कग} + \text{कय} = \text{गघ} + \text{गय}$

$\therefore \quad \text{अय} + \text{कय} - \text{गय} = \text{गघ} - \text{अक} + \text{कग}$

अथवा, $(\text{अ} + \text{क} - \text{ग})\,\text{य} = \text{गघ} - \text{अक} + \text{कग}$ ।

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{गघ} - \text{अक} + \text{कग}}{\text{अ} + \text{क} - \text{ग}} ।$$

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $३\text{य} - १७ = २\text{य} + ५$, इस में — $\text{य} = २२$ ।

(२) $५\text{य} + १३ = २७ - २\text{य}$, इस में — $\text{य} = २$ ।

(३) $\text{य} - २\text{य} + ३\text{य} - ४\text{य} + ५\text{य} = ७$, इस में — $\text{य} = २\frac{१}{३}$ ।

(४) $\text{य} + ९ = ३\text{य} + १$, इस में — $\text{य} = ४$ ।

(५) $७ - ३\text{य} = ३\text{य} - ५$, इस में — $\text{य} = २$ ।

(६) $२९ - ४\text{य} + ८ = ५\text{य} + १०$, इस में — $\text{य} = ३$ ।

(७) $७\text{य}^2 - ५\text{य} = २३\text{य}$, इस में — $\text{य} = ४$ ।

(८) $३ य + ७ = १२ + २ (५ - य)$, इस में $य = ३$ ।

(९) $५ (२ य - ३) + १५ = ७ य + २ (४ य - ३)$, इस में $य = १\frac{१}{५}$ ।

(१०) $य - ३ (५ - ४ य) = ७ (३ य - ८) + १$, इस में $य = ५$ ।

(११) $३ (य - ७) + २ (३ य - ५) = १७ - (५ य - ८)$,
इस में $य = ४$ ।

(१२) $८ य + ७ (३ य - ४) = २६ - ३ (२ य - १७)$, इस में $य = ३$ ।

(१३) $७ य + २ (९ य - ४) - ७ (य + ५) = ६ य - ७$,
इस में $य = ३$ ।

(१४) $३ (२ य + ७) + ५ (३ य - ४) = १८५ - ८ (५ य + २३)$,
इस में $य = ०$ ।

(१५) $३५ (१३ - ६ य) - २८ (९ - ५ य) = १८९ - १४ (७ य - ३)$
इस में $य = १$ ।

(१६) $(य + ७) (य - ३) + ७ य = (२ य - ७) (य + ५) - य^२ + १६$,
इस में $य = \frac{१}{४}$ ।

(१७) $३ य^२ - (य - ५) (२ य - ३) = (य + २) (य - १) + ७१$,
इस में $य = ७$ ।

(१८) $४ य^२ - १७ य + ७ = ११ + य^२ - ३ य - ४$, इस में $य = ७$ ।

(१९) $(य + १) (य - २) (य + ३) = (य^२ - १) (य + ५)$,
इस में $य = -\frac{१}{३}$ ।

(२०) $८ (य + ५) (य + १३) - ११ (य + २) (य + १३) = २४ य$
$- ३ (य + २) (य + ५)$, इस में $य = ११$ ।

(२१) $(य - ३) (य - ५) - ४ (य - ४) (य - ५) = (य - १) (य - ६)$
$- ४ (य - ३) (य - ४)$, इस में $य = ३\frac{२}{७}$ ।

(२२) $(य - १) (५ य - ४) - (य - २) (२ य + ३) - (य - ३) (३ य + १)$
$= २ य - १$, इस में $य = ७$ ।

(२३) $(\text{य}^{२} + १)^{२} - (\text{य}^{२} - १)^{२} = ४\,\text{य}^{२} - \text{य} + १०$, इस में $\text{य} = १०$ ।

(२४) $४\,(\text{य}^{२} - ३\,\text{य} - १०)^{२} - ३\,\text{य} = (२\,\text{य}^{२} - ६\,\text{य} + २९)^{२}$
$- ४९\,(२\,\text{य} - ३)^{२} - १७$, इस में $\text{य} = ५\frac{२}{३}$ ।

(२५) $(\text{य} + १)^{२}\,(\text{य} + ३)^{२} + ४\,(\text{य} + २)^{२} = (\text{य}^{२} + ४\,\text{य} + ५)^{२}$
$+ ५\,(\text{य} - २)$, इस में $\text{य} = २$ ।

(२६) $\text{य} + ३ = \text{य} + ५$, इस में $\text{य} = \infty$ ।

(२७) $\text{अय} - \text{क} = \text{गय} - \text{घ} - \text{चय}$, इस में $\text{य} = \frac{\text{क} - \text{घ}}{\text{अ} - \text{ग} + \text{च}}$ ।

(२८) $\text{अय} + \text{क}^{२} = \text{अ}^{२} - \text{कय}$, इस में $\text{य} = \text{अ} - \text{क}$ ।

(२९) $\text{अ} - \text{कय} + \text{ग} = \text{घ} - \text{चय}$, इस में $\text{य} = \frac{\text{अ} + \text{ग} - \text{घ}}{\text{क} - \text{च}}$ ।

(३०) $(\text{अ} + \text{क})\,\text{य} - (\text{अ} - \text{क})\,\text{य} = \text{अ}^{२} - \text{क}^{२}$,
इस में $\text{य} = \frac{\text{अ}^{२} - \text{क}^{२}}{२\,\text{क}}$ ।

(३१) $३\,\text{य} - ४\,\text{अ} = \text{कय} + \text{अ}\,(\text{ग} - २\,\text{य})$, इस में $\text{य} = \frac{\text{अ}\,(\text{ग} + ४)}{२\,\text{अ} - \text{क} + ३}$ ।

(३२) $\text{अ}^{३}\,\text{य} - २\,\text{अ}^{२}\text{य}^{२} = \text{अ}^{२}\text{कय} - ४\,\text{अ}^{२}\text{य}^{२}$, इस में $\text{य} = \frac{\text{क} - \text{अ}}{२}$ ।

(३३) $\text{अय} + \text{क}\,(\text{य} - \text{ग}) = \text{घ} - \text{च}\,(\text{य} - \text{छ})$, इस में $\text{य} = \frac{\text{कग} + \text{घ} + \text{चछ}}{\text{अ} + \text{क} + \text{च}}$ ।

(३४) $\text{अ}^{३} + \text{क}\,(२\,\text{अ} - \text{क})\,\text{य} = \text{अ}\,(\text{अ} + \text{क})\,\text{य} - \text{क}^{३}$,
इस में $\text{य} = \text{अ} + \text{क}$ ।

(३४) $\text{अ}\,(\text{अ} + \text{य}) - \text{क}\,(२\,\text{य} + \text{ग}) = \text{अ}^{२} - \text{क}\,(३\,\text{य} + \text{घ})$,
इस में $\text{य} = \frac{\text{क}\,(\text{ग} - \text{घ})}{\text{अ} + \text{क}}$ ।

(३६) $\text{अ}\,(\text{य} + ३\,\text{क}^{२}) - \text{क}\,(\text{य} + ३\,\text{अ}^{२}) = (\text{अ} - \text{क})^{३}$,
इस में $\text{य} = \text{अ}^{२} + \text{अक} + \text{क}^{२}$ ।

(३७) $(\text{य} + \text{अ})\,(\text{य} - \text{क}) = (\text{य} - \text{ग})\,(\text{य} - \text{घ})$
इस में $\text{य} = \frac{\text{अक} + \text{गघ}}{\text{अ} - \text{क} + \text{ग} + \text{घ}}$ ।

(३८) $\text{अय}\,(\text{य} - \text{अ}) - \text{कय}\,(\text{य} - \text{क}) + \text{अक}\,(\text{अ} - \text{क})$
$= (\text{अ} - \text{क})\,(\text{य}^{२} - \text{आ})$, इस में $\text{य} = \frac{\text{अक} + \text{आ}}{\text{अ} + \text{क}}$ ।

(३९) $अ(अय - २क) - य(क^2 - ग^2) = अ^2 + क^2 - ग(२अय + ग)$,

इस में $य = \frac{अ + क - ग}{अ - क + ग}$।

(४०) $(अ + य)(अ + २य) + (अ + २य)(अ + ३य)$

$- (अ - य)(अ - २य) = २(अ + य)(अ + ३य)$,

इस में $य = \frac{१}{३}अ$।

८४। जिस उद्दिष्ट समीकरण में अव्यक्त एक वा अनेक सच्छेद पदों में पड़ा है उसकी समक्रिया।

रीति। उद्दिष्ट समीकरण में (६९) वे प्रक्रम से छेदगम करके सब छेदों को उड़ा देओ। फिर उस की समक्रिया ऊपर के प्रक्रम से तुरंत होगी।

जाना चाहिये कि इस में जो सच्छेद पद के अंश में वा छेद में सच्छेद पद आवे तो उद सच्छेद पदके अंश और छेद इन दोनों को ऐसे एक हि पद से गुण देओ कि जिससे उस पद के अंश में वा छेद में छेद न रहे फिर पूर्वोक्त रीति से समक्रिया करो।

उदा० (१) $\frac{य}{२} - \frac{य}{३} = ५ - \frac{य}{४}$, इस में य का मान क्या है।

यहां छेदगम करने से अर्थात् १२ इस छेदों के लघुतमापवर्त्य से हर एक पद को गुण देने से,

$$६य - ४य = ६० - ३य$$

$$\therefore \quad २य + ३य = ६०;\ वा,\ ५य = ६०।$$

और $\quad य = \frac{६०}{५} = १२$।

उदा० (२) $\frac{य + १}{६} + \frac{२य - ७}{१०} = \frac{४य + ७}{१५}$, इस में य कितना है?

यहां छेदगम करने से अर्थात् समीकरण को

$$\frac{१}{६}(य + १) + \frac{१}{१०}(२य - ७) = \frac{१}{१५}(४य + ७)$$

इस भांति लिख के दोनो पक्षों को ३० इस छेदों के लघुतमापवर्त्य से गुण देने से, $\quad ५(य + १) + ३(२य - ७) = २(४य + ७)$

वा, $$५य+५+६य-२१=८य+१४$$

∴ $$५य+६य-८य=१४-५+२१$$

वा, $$३य=३० ;\ \therefore य=\frac{३०}{३}=१० ।$$

इसी भांति जिस समीकरण में सच्छेद पद का अंश संयुक्तपद होगा उस की समक्रिया करो ।

उदा० (३) $$५य+\frac{य+३}{२}-\frac{२य-७}{३}=२५\frac{२}{३}-\frac{य+११}{६} ।$$
इस में य का मान क्या है?

यहां समीकरण को

$$५य+\frac{१}{२}(य+३)-\frac{१}{३}(२य-७)=\frac{७७}{३}-\frac{१}{६}(य+११)$$

इस रूप में लिख के ६ से गुण देने से,

$$३०य+३(य+३)-२(२य-७)=१५४-(य+११)$$

वा, $$३०य+३य+९-४य+१४=१५४-य-११$$

∴ $$३०य+३य-४य+य=१५४-११-९-१४$$

वा, $$३०य=१२०$$

∴ $$य=\frac{१२०}{३०}=४ ।$$

उदा० (४) $$\frac{५य-७}{१२}-\frac{२य-५}{२१}+\frac{११य-३}{११९}=३३\frac{१}{३}-\frac{य+२०१}{२८}$$
इस में य का मान क्या है?

यहां समीकरण को

$$\frac{१}{१२}(५य-७)-\frac{१}{२१}(२य-५)+\frac{१}{११९}(११य-३)$$
$$=\frac{१००}{३}-\frac{१}{२८}(य+२०१)$$

इस रूप में लिख के दोनो पक्षों को ८४ से गुण देने से,

$$३५य-४९-८य+२०+\frac{१२}{१७}(११य-३)=२८००-३य-६०३$$

पक्षान्तरनयन से, $\frac{१२}{१७}(११य-३)=२२२६-३०य$

वा, $\frac{४}{१७}(११ य - ३) = ७४२ - १० य$

छेदगम से, $४४ य - १२ = १२६१४ - १७० य$

$\therefore$ $२१४ य = १२६२६$; और $य = \frac{१२६२६}{२१४} = ५९$ ।

इस भांति के समीकरण में अर्थात् जिस में सकल छेदों का लघुतमापवर्त्य बहुत बड़ा हो उस में पहिले जितने बहुत छेदों का लघुतमापवर्त्य छोटा हो उन को उड़ा के पक्षान्तरनयन से सब अभिन्न पदों को एक पक्ष में कर देओ और फिर छेदगम कर के पूर्ववत् क्रिया करो। इस से समक्रिया में लाघव होगा।

उदा० (५) $\frac{२ य + \frac{३}{१०}}{६} - \frac{३ य - \frac{१३}{१५}}{१०} = \frac{५ य + \frac{१}{४}}{१५}$, इस में य क्या है?

यहां उक्तरीति से अंशों के छेदों को उड़ा देने से,

$$\frac{२० य + ३}{६०} - \frac{४५ य - १३}{१५०} = \frac{२० य + १}{६०}$$

६० से गुण देने से, $२० य + ३ - \frac{२(४५ य - १३)}{५} = २० य + १$

पक्षान्तरनयन से, $२ = \frac{२(४५ य - १३)}{५}$; वा, $\frac{४५ य - १३}{५} = १$

छेदगम से, $४५ य - १३ = ५$; $\therefore ४५ य = १८$; और $य = \frac{१८}{४५} = \frac{२}{५}$ ।

अथवा जिस समीकरण के छेदों में छेद नहीं हैं केवल अंशों में हैं वहां पहिले साधारण रीति से छेदगम कर के पूर्ववत् क्रिया करते हैं। जैसा इस समीकरण में छेदगम से अर्थात् छेदों के लघुतमापवर्त्य ३० से दोनों पक्षों को गुण देने से,

$$१० य + \frac{३}{२} - ९ य + \frac{१३}{५} = १० य + \frac{१}{२} ।$$

पक्षान्तरनयन से, $- ९ य = \frac{१}{२} - \frac{३}{२} - \frac{१३}{५} = - १ - \frac{१३}{५}$

वा; $९ य = १ \frac{१३}{५} = \frac{१८}{५}$ $\therefore य = \frac{१८}{५ \times ९} = \frac{२}{५}$ ।

उदा० (६) $\dfrac{२\text{य} - \frac{१}{२}}{३} - \dfrac{\text{य} - \frac{\text{य}-७}{३}}{४} = \dfrac{५ + \dfrac{३\text{य} - \frac{\text{य}+६}{५}}{४}}{६}$ इस में य क्या है?

१२ से गुण देने से, $८\text{य} - २ - ३\text{य} + \text{य} - ७ = १० + \dfrac{३\text{य} - \frac{\text{य}+६}{५}}{२}$

$$\therefore \quad ६\text{य} - १९ = \dfrac{३\text{य} - \frac{\text{य}+६}{५}}{२}$$

२ से गुण देने से, $१२\text{य} - ३८ = ३\text{य} - \dfrac{\text{य}+६}{५}$

५ से गुण देने से, $६०\text{य} - १९० = १५\text{य} - \text{य} - ६$

पक्षान्तरनयन से, $६०\text{य} - १५\text{य} + \text{य} = १९० - ६$

वा, $४६\text{य} = १८४$; $\therefore \text{य} = \dfrac{१८४}{४६} = ४$ ।

उदा० (७) $\dfrac{३\text{य} - \frac{१}{२}}{\frac{२}{३}} - \dfrac{२\text{य} + \frac{१}{३}}{\frac{१}{२}} = ३\frac{७}{१२}$, इस में य क्या है?

यहां उक्त रीति से अंश के और छेद के छेदों को उड़ा देने से,

$$\dfrac{१८\text{य} - ३}{४} - \dfrac{१२\text{य} + २}{३} = \dfrac{४३}{१२} \text{ ।}$$

१२ से गुण देने से, $५४\text{य} - ९ - ४८\text{य} - ८ = ४३$

पक्षान्तरनयन से, $६\text{य} = ६०$; $\therefore \text{य} = \dfrac{६०}{६} = १०$ ।

उदा० (८) $\dfrac{१}{२\text{य}} + \dfrac{२}{३\text{य}} - \dfrac{३}{४\text{य}} = \dfrac{५}{२६}$, इस में य का मान क्या है?

यहां हर एक पद को १२ य से गुण देने से,

$६ + ८ - ९ = \dfrac{३०\text{य}}{१३}$, वा, $५ = \dfrac{३०\text{य}}{१३}$ $\therefore \text{य} = \dfrac{५ + १३}{३०} = \dfrac{१३}{६} = २\frac{१}{६}$ ।

उदा० (९) $\dfrac{५\text{य} + १७}{६} - \dfrac{३\text{य} - १३}{८} = \dfrac{४\text{य} + १}{३(\text{य} - २२)} + \dfrac{११\text{य} - १४}{२४}$, इस में य का मान क्या है?

यहां दोनो पक्षों को २४ से गुण देने से,

$$२० य + ६८ - ९ य + ३९ = \frac{३२ य + ८}{य - २२} + ११ य - १४$$

पक्षान्तरनयन से, $१२१ = \frac{३२ य + ८}{य - २२}$

छेदगम से, $१२१ य - २६६२ = ३२ य + ८$

पक्षान्तरनयन से, $१२१ य - ३२ य = २६६२ + ८$

वा, $८९ य = २६७०$; और $य = \frac{२६७०}{८९} = ३०$।

इस जाति के समीकरण में अर्थात् जिस में कोइ एक छेद संयुक्त-पद हो उस में पहिले और छेदों को उड़ा देओ फिर पक्षान्तरनयन से सब अभिन्न पदों को एक पक्ष में करके छेदगम करो।

उदा० (१०) $\frac{३ (३ + २ य)}{३ - ४ य} + \frac{२ + य}{१ + ३ य} = ५ + य$, इस में य का मान क्या है?

तब छेदगम से, $३ (३ + २ य) (१ + ३ य) + (२ + य) (३ - ४ य)$
$= (३ - ४ य) (१ + ३ य) (५ + य)$।

वा, $९ + ३३ य + १८ य^२ + ६ - ५ य - ४ य^२ = १५ + २८ य - ५५ य^२ - १२ य^३$

पक्षान्तरनयन से, $१२ य^३ = - ६९ य^२$

$\therefore \quad ४ य = - २३$; और $य = - \frac{२३}{४} = - ५\frac{३}{४}$।

अथवा इस प्रकार के समीकरण में अर्थात् जिस में अनेक छेद ऐसे होवें कि जिन में कोइ दो छेद परस्पर अदृढ न हों उस में छेदगम के लिये अभिन्न पदों को एक पक्ष में कर के एक एक छेद से दोनो पक्षों को गुणते जाओ। जैसा

इस समीकरण में पहिले $३ - ४ य$ से गुण देने से,

$$९ + ६ य + \frac{६ - ५ य - ४ य^२}{१ + ३ य} = १५ - १७ य - ४ य^२$$

पक्षान्तरनयन से, $\frac{६ - ५ य - ४ य^२}{१ + ३ य} = ६ - २३ य - ४ य^२$

फिर १ + ३ य, से गुण देने से,

$६ - ५ य - ४ य^२ = ६ - ५ य - ७३ य^२ - १२ य^३$

पक्षान्तरनयन से, $१२ य^३ = - ६९ य^२$; $\therefore य = - ५ \frac{३}{४}$ ।

उदा० (११) $\frac{४ य + १}{५ य - २} - \frac{४ य + ५}{२(६ य - १)} = \frac{७ य + २}{१५ य + १}$, इस में य क्या है ?

यहां ५ य − २ से गुण देने से, $४ य + १ - \frac{२० य^२ + १७ य - १०}{२(६ य - १)}$

$= \frac{३५ य^२ - ४ य - ४}{१५ य + १}$

फिर २ (६ य − १) अर्थात् १२ य − २ इस से गुण देने से,

$$४८ य^२ + ४ य - २ - २० य^२ - १७ य + १०$$

$$= \frac{४२० य^३ - ११८ य^२ - ४० य + ८}{१५ य + १}$$

अथवा, $२८ य^२ - १३ य + ८ = \frac{४२० य^३ - ११८ य^२ - ४० य + ८}{१५ य + १}$ ।

फिर १५ य + १ से गुण देने से,

$४२० य^३ - १६७ य^२ + १०७ य + ८ = ४२० य^३ - ११८ य^२ - ४० य + ८$

पक्षान्तरनयन से, $- ४९ य^२ = - १४७ य$; वा, $४९ य = १४७$;

$\therefore य = \frac{१४७}{४९} = ३$ ।

उदा० (१२) $\frac{अय}{क} - \frac{कय}{अ} = \frac{अ + क}{अक}$ इस में य क्या है ?

अक, से गुण देने से, $अ^२य - क^२य = अ + क$

$\therefore य = \frac{अ + क}{अ^२ - क^२} = \frac{१}{अ - क}$ ।

उदा० (१३) $\frac{अ}{क - य} = \frac{अ - य}{य}$ इस में य क्या है ?

छेदगम से, $य^२ = अक - (अ + क) य + य^२$,

पक्षान्तरनयन से, $(अ + क) य = अक$

$\therefore य = \frac{अक}{अ + क}$ ।

उदा० (१४) $\dfrac{\text{य} - \text{अ}^{\text{२}}}{\text{क}^{\text{२}} - \text{य}} = \dfrac{\text{क}}{\text{अ}}$ इस में य क्या है?

छेदगम से, $\text{अय} - \text{अ}^{\text{३}} = \text{क}^{\text{३}} - \text{कय}$

पक्षान्तरनयन से, $(\text{अ} + \text{क})\,\text{य} = \text{अ}^{\text{३}} + \text{क}^{\text{३}}$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{अ}^{\text{३}} + \text{क}^{\text{३}}}{\text{अ} + \text{क}} = \text{अ}^{\text{२}} - \text{अक} + \text{क}^{\text{२}} \text{ ।}$$

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\text{य} + \dfrac{\text{य}}{\text{२}} = \dfrac{\text{य}}{\text{३}} + \text{७}$, इस में य = ९ ।

(२) $\dfrac{\text{य}}{\text{३}} - \dfrac{\text{य}}{\text{४}} + \dfrac{\text{य}}{\text{७}} = \text{१९}$, इस में य = ८४ ।

(३) $\text{य} - \dfrac{\text{य}}{\text{२}} + \dfrac{\text{२य}}{\text{३}} - \dfrac{\text{३य}}{\text{४}} + \dfrac{\text{४य}}{\text{५}} = \dfrac{\text{५य}}{\text{६}} + \text{५}\frac{\text{३}}{\text{४}}$, इस में य = १५ ।

(४) $\dfrac{\text{५य}}{\text{१२}} + \dfrac{\text{७य}}{\text{१५}} + \dfrac{\text{११य}}{\text{२०}}\ \text{१}\frac{\text{१३}}{\text{३०}}$, इस में य = ६० ।

(५) $\dfrac{\text{२य} + \text{१}}{\text{३}} - \dfrac{\text{३य} - \text{७}}{\text{५}} + \dfrac{\text{४य} + \text{५}}{\text{७}} = \text{५}$, इस में य = ४ ।

(६) $\dfrac{\text{७य} - \text{१}}{\text{१०}} - \dfrac{\text{५य} - \text{१}}{\text{१४}} = \dfrac{\text{१८य} - \text{१९}}{\text{३५}}$, इस में य = ३ ।

(७) $\dfrac{\text{य} - \text{१}}{\text{१०}} + \dfrac{\text{२य} - \text{६}}{\text{१५}} = \dfrac{\text{३}}{\text{५}} - \dfrac{\text{य} - \text{३}}{\text{६}}$, इस में य = ४ ।

(८) $\dfrac{\text{२य} + \text{३}}{\text{६}} + \dfrac{\text{य} + \text{१}}{\text{१०}} = \text{य} + \dfrac{\text{९} - \text{य}}{\text{१५}} - \text{३}\frac{\text{१}}{\text{२}}$, इस में य = ७ ।

(९) $\text{३य} + \dfrac{\text{१२} - \text{५य}}{\text{२१}} = \text{२य} + \dfrac{\text{य} + \text{७}}{\text{६}}$, इस में य = १ ।

(१०) $\text{७} - \dfrac{\text{य} + \text{९}}{\text{४}} = \text{१} + \frac{\text{३}}{\text{८}}\text{य}$, इस में य = ६ ।

(११) $\dfrac{\text{७य} + \text{५}}{\text{१२}} - \dfrac{\text{४य} - \text{१}}{\text{१५}} = \text{७} - \dfrac{\text{३य} + \text{२}}{\text{२०}}$, इस में य = १३$\frac{\text{३}}{\text{४}}$ ।

(१२) $\dfrac{\text{२य} - \text{१}}{\text{३५}} + \dfrac{\text{३य} + \text{२}}{\text{४०}} - \dfrac{\text{४य} - \text{३१}}{\text{५६}} = \text{१}$, इस में य = ७ ।

(१३) $\dfrac{\text{य} - \text{४}}{\text{३३}} + \dfrac{\text{५य} - \text{३}}{\text{३९}} + \dfrac{\text{य}}{\text{७७}} + \dfrac{\text{४य} - \text{१७}}{\text{९१}} = \dfrac{\text{९}}{\text{१३}}$, इस में य = ५ ।

(१४) $\dfrac{\text{य} - \text{१}}{\text{१८९}} + \dfrac{\text{३य} - \text{५}}{\text{२१६}} - \dfrac{\text{५य} - \text{९}}{\text{७२८}} = \dfrac{\text{१}}{\text{११७}}$, इस में य = २ ।

(१५) $\frac{\text{८ य}}{\text{१०५}} + \frac{\text{१३ य} - \text{६}}{\text{१६५}} + \frac{\text{१७ य} + \text{९}}{\text{२३१}} + \frac{\text{२५ य} - \text{७}}{\text{३८५}}, = \text{३}\frac{\text{४}}{\text{५}}$

इस में $\text{य} = \text{१३}$ ।

(१६) $\text{१२ य} + \frac{\text{५ य} + \text{२}}{\text{६}} - \frac{\text{११ य} - \text{८}}{\text{१४}} = \frac{\text{१३ य} - \text{५}}{\text{२१}} + \frac{\text{७ य} + \text{१२}}{\text{१३}} + \text{२२}$ ।

इस में $\text{य} = \text{२}$ ।

(१७) $\frac{\text{४ य} - \text{१}}{\text{६६}} - \frac{\text{१४ य} - \text{४}}{\text{७७}} + \frac{\text{२० य} + \text{९}}{\text{७८}} - \frac{\text{१० य} + \text{१}}{\text{९१}} = \frac{\text{२}}{\text{१३}},$

इस में $\text{य} = \frac{\text{१}}{\text{२}}$ ।

(१८) $\frac{\text{य} - \text{७}}{\text{१५}} + \frac{\text{२ य} - \text{१३}}{\text{२१}} + \frac{\text{३ य} - \text{१५}}{\text{३५}} = \frac{\text{७ य} - \text{४}}{\text{५९}} - \frac{\text{२}}{\text{७}},$

इस में $\text{य} = \text{९}$ ।

(१९) $\text{९ य} - \frac{\text{३१ य} - \text{६}}{\text{७७}} + \frac{\text{२९ य} + \text{४}}{\text{३३}} = \text{४२७} - \frac{\text{य} - \text{१९}}{\text{२१}},$

इस में $\text{य} = \text{४४}\frac{\text{१०}}{\text{११}}$ ।

(२०) $\frac{\text{१२ य} + \text{२९}}{\text{१४३}} - \frac{\text{८ य} - \text{४७}}{\text{१८७}} = \frac{\text{१० य} + \text{९४}}{\text{२२१}}$, इस में $\text{य} = \text{७}$ ।

(२१) $\text{३ य} + \text{७} - \frac{\text{५ य} + \text{७}}{\text{३}} = \frac{\text{११ य} + \text{२६}}{\text{७}}$, इस में $\text{य} = \text{४}$ ।

(२२) $\frac{\text{५ य} - \text{७}}{\text{२}} - \frac{\text{७ य} - \text{८}}{\text{५}} = \text{१०५} - \frac{\text{८ य} - \text{७}}{\text{३}}$, इस में $\text{य} = \text{२९}$ ।

(२३) $\text{५ य} - \frac{\text{य} - \text{२}}{\text{२१}} - \frac{\text{३(य} - \text{५)}}{\text{७७}} = \frac{\text{४ य} - \text{११}}{\text{३३}} - \frac{\text{४ य} + \text{७१}}{\text{८३}} + \text{१६},$

इस में $\text{य} = \text{३}$ ।

(२४) $\frac{\text{२ य} - \text{१९}}{\text{१८}} + \frac{\text{य} - \text{९}}{\text{२२}} + \frac{\text{१८} - \text{य}}{\text{९९}} = \frac{\text{२}}{\text{११}}$, इस में $\text{य} = \text{१०}$ ।

(२५) $\frac{\text{३ य} - \text{२}}{\text{१०}} - \frac{\text{७ य} - \text{२}}{\text{१८}} + \frac{\text{४(य} + \text{१)}}{\text{४५}} + \frac{\text{५ य} + \text{१०४}}{\text{१०९}} = \text{१},$

इस में $\text{य} = \text{११}$ ।

(२६) $\text{१९}\frac{\text{३}}{\text{४}} + \frac{\text{५ य} - \text{१३}}{\text{१२}} - \frac{\text{९(य} - \text{३)}}{\text{३५}} = \frac{\text{१३ य} + \text{६}}{\text{११}} + \text{१०}\frac{\text{५}}{\text{७}},$

इस में $\text{य} = \text{८}$ ।

(२७) $\text{य} + \frac{\text{७ य} - \text{२२}}{\text{३५}} - \frac{\text{३ य} + \text{१३}}{\text{१४}} = \text{१९}\frac{\text{२८}}{\text{२९}} - \frac{\text{२ य} - \text{१५}}{\text{५}} - \frac{\text{५ य} - \text{१}}{\text{८७}},$

इस में $\text{य} = \text{१७}$ ।

(२८) $य + \frac{५}{६}\left(\frac{५ य + १}{१३}\right) - \frac{३}{७}\left(\frac{५ य + १}{८}\right) = ५७ - ४ य,$

इस में $य = ११$ ।

(२९) $\frac{५}{७}\left(\frac{४ य + १}{११}\right) - \frac{४}{१३}\left(\frac{७ य - ३}{१०}\right) + \frac{९}{१०}\left(\frac{९ य - १}{१७}\right)$

$= \frac{२}{२३}(६ य + १)$, इस में $य = १९$ ।

(३०) $\frac{२ य + १३}{११} - \frac{३}{१३}\left(य + \frac{२ य + १}{७}\right) = \frac{३(य - १०)}{१९},$

इस में $य = १०$ ।

(३१) $\left(\frac{७ य + १७}{५}\right)\left(\frac{६ य - १}{४}\right) - \left(\frac{२ य + ५}{४}\right)\left(\frac{१३ - य}{३}\right)$

$= \left\{५ य + \frac{२(य - ४)}{३}\right\}\left\{\frac{२ य + ३}{५}\right\}$, इस में $य = ७$ ।

(३२) $\frac{३ य + १}{५} \times \frac{२७ य - २}{७} - \frac{४ य + ३}{५} \times \frac{५ य - २}{८}$

$= \frac{४ य - ७}{७} \times \frac{२३ य + ११०}{८}$, इस में $य = ३$ ।

(३३) $३.७ य + .०१९ य = .०३४६९ + .२५ य$, इस में $य = .०१$ ।

(३४) $.३७ य + २.७५३४ - .२९३ य = ९.२५५ य$, इस में $य = .३$ ।

(३५) $.५ य + .८\dot{३} य = २.०८\dot{३} - .७५ य$, इस में $य = १$ ।

(३६) $.\dot{३} य + .\dot{७} य + .\dot{९} य + .\dot{१}\dot{४} य = ४.\dot{५}\dot{०}$, इस में $य = २$ ।

(३७) $\frac{य + \frac{१}{२}}{२} + \frac{\frac{३}{२} य - २}{३} = २\frac{७}{१२}$, इस में $य = ३$ ।

(३८) $\frac{४\frac{१}{३} य + ४}{५} - \frac{२\frac{३}{४} य - १\frac{१}{२}}{३} + \frac{३\frac{१}{२} य - १}{४} = ६$, इस में $य = ६$ ।

(३९) $\frac{य - ३\frac{१}{३}}{७} - \frac{१७\frac{१}{५} - २ य}{९} = ८\frac{१}{५}$, इस में $य = २९$ ।

(४०) $\frac{१\frac{२}{५}य+१}{२}-\frac{४\frac{१}{२}य-१\frac{१}{२}}{७}=३-\frac{१\frac{१}{४}य-\frac{१}{४}}{३}$, इस में $य=५$ ।

(४१) $\frac{२\frac{१}{५}य-८\frac{३}{५}}{७}+\frac{२\frac{१}{२}य-११}{५}-\frac{१\frac{१}{७}य-५\frac{१३}{१४}}{३}=\frac{५}{७}$,
इस में $य=५$ ।

(४२) $\frac{य+७}{\frac{३}{७}}-\frac{य-५}{\frac{४}{५}}=२८$, इस में $य=५$ ।

(४३) $\frac{य+१\frac{२}{३}}{१\frac{१}{३}}-\frac{२य+३}{३\frac{१}{२}}=२$, इस में $य=९$ ।

(४४) $\frac{१}{३}य-\frac{य-\frac{१}{२}}{\frac{३}{२}}=१३\frac{१}{२}-\frac{य-१}{१\frac{१}{५}}$, इस में $य=२८$ ।

(४५) $२य-\frac{१७-५\frac{१}{३}य}{२}=२५\frac{१}{३}+\frac{१३य-५\frac{१}{६}}{३\frac{१}{२}}-\frac{य+२९२}{१०}$,
इस में $य=३$ ।

(४६) $\frac{य+१\frac{१}{२}}{२\frac{१}{२}}-\frac{य+२}{३\frac{३}{४}}=\frac{४य-३\frac{२}{५}}{३}$, इस में $य=१$ ।

(४७) $\frac{य+१}{१\frac{१}{६}}-\frac{य-१\frac{४}{५}}{१\frac{३}{५}}+\frac{२य+१}{२\frac{१}{४}}=१०+\frac{९य-७}{१०}-\frac{य+४}{४\frac{१}{४}}$,
इस में $य=१३$ ।

(४८) $७य-\frac{६य-\frac{५य+७}{८}}{१३}=२६+\frac{२य+११}{१०\frac{१}{२}}+\frac{य+१३}{३\frac{३}{५}}$,
इस में $य=५$ ।

(४९) $२य+\frac{\frac{३}{४}य-\frac{१\frac{१}{२}य-७\frac{१}{३}}{२\frac{१}{५}}}{७\frac{३}{४}}=१४\frac{५०३}{१०२३}$ इस में $य=७$ ।

(५०) $\dfrac{३\frac{१}{२}\text{य}-५\frac{१}{३}}{१\frac{१}{४}}-\dfrac{१}{३}\left\{\dfrac{१}{५}\text{य}+\dfrac{५\text{य}-\frac{३}{४}}{३\frac{१}{२}}\right\}=\dfrac{३\text{य}-२\frac{१}{३}}{१\frac{१}{३}}-१\dfrac{३७}{४२}$,

इस में $\text{य}=२$ ।

(५१) $\dfrac{७\text{य}-\frac{३}{५}}{\frac{२}{३}}+\dfrac{८\left(\text{य}-\dfrac{\frac{२}{५}\text{य}+\frac{१}{७}}{\frac{३}{४}}\right)}{४\frac{१}{७}}-१२$

$=\dfrac{२\text{य}+१९\frac{१}{३}}{६\frac{१}{२}}+\dfrac{६९२\frac{७}{१३}}{१७४०}$ इस में $\text{य}=१\frac{१}{२}$ ।

(५२) $\dfrac{.११\text{य}+१.५}{.२४}-\dfrac{.७१\text{य}-.२}{२.९}=१०.४$, इस में $\text{य}=६$ ।

(५३) $\dfrac{१७}{\text{य}}-\dfrac{१५}{\text{य}}=२$, इस में $\text{य}=१$ ।

(५४) $\dfrac{३}{\text{य}}+\dfrac{४}{५}=\dfrac{४}{\text{य}}+\dfrac{३}{५}$, इस में $\text{य}=५$ ।

(५५) $१७-\dfrac{२}{३\text{य}}+\dfrac{४}{५\text{य}}=\dfrac{७}{८\text{य}}+१६\dfrac{१५१}{१४०}$, इस में $\text{य}=२$ ।

(५६) $\dfrac{१}{१८९\text{य}}-\dfrac{१}{७२८\text{य}}=\dfrac{१}{१३}-\dfrac{१}{२१६\text{य}}$, इस में $\text{य}=\frac{१}{९}$ ।

(५७) $\dfrac{१}{३\text{य}}+\dfrac{३\frac{१}{३}\text{य}}{१+\text{य}}=\dfrac{१०}{३}$, इस में $\text{य}=\frac{१}{९}$ ।

(५८) $\dfrac{५}{\text{य}+१}-३\frac{१}{७}=\dfrac{\frac{२}{७}}{\text{य}+१}$, इस में $\text{य}=\frac{१}{२}$ ।

(५९) $\dfrac{६\text{य}-१३}{१५}+\dfrac{५\text{य}-१४}{७\text{य}+२}=\dfrac{२\text{य}}{५}-\dfrac{२}{३}$, इस में $\text{य}=४$ ।

(६०) $\dfrac{७\text{य}-२५}{१४}+\dfrac{१२\text{य}+१९}{२०\text{य}-१}-\dfrac{२\text{य}+१७}{२१}=\dfrac{१७\text{य}-२५}{४२}$,

इस में $\text{य}=\frac{३}{४}$ ।

(६१) $\dfrac{३\text{य}+२}{२०}+\dfrac{२(\text{य}-१)}{४५}-\dfrac{११\text{य}+३}{१५\text{य}+७}=\dfrac{७\text{य}+२}{३६}-\dfrac{५}{७}$,

इस में $\text{य}=७$ ।

(६२) $\dfrac{२९}{३\text{य}+१७}=\dfrac{३}{४\text{य}-१३}$, इस में $\text{य}=४$ ।

(६३) $\frac{२य-१}{१०}+\frac{३य+८}{१४}-\frac{५}{४य-९}+\frac{३य+१}{३५}=\frac{य+१}{२}-\frac{७}{५य-६}$, इस में $य=११$ ।

(६४) $\frac{१}{२(३य+७)}+\frac{१}{३य-१}=\frac{१}{२य+१}$, इस में $य=२७$ ।

(६५) $\frac{य+२}{य+१}+\frac{य-५}{य+११}=\frac{२य-१}{य+७}$, इस में $य=-१\frac{६}{७}$ ।

(६६) $\frac{२य+११}{य-२}-\frac{५}{य+१२}=\frac{२य-१}{य-५\frac{१}{२}}$, इस में $य=२३$ ।

(६७) $\frac{य+२}{य+५}+\frac{य-\frac{७}{१०}}{य-१}+\frac{२\frac{७}{१०}}{य+७}=२$, इस में $य=५$ ।

(६८) $\frac{२य-७}{१\frac{१}{२}}+\frac{५य+४-\frac{३य+१७}{५}}{य-\frac{१}{६}}=\frac{८य-१}{६}$, इस में $य=११$ ।

(६९) $\frac{१}{य}+\frac{५}{य+२}+\frac{२२+\frac{४}{य}}{य^{२}-४}=२$, इस में $य=५$ ।

(७०) $\frac{८}{य+२}-\frac{११}{य+५}+\frac{३}{य+१३}=\frac{७य+५}{(य+२)(य+५)(य+१३)}$,
इस में $य=३७$ ।

(७१) $\frac{१}{य+२}-\frac{१}{य+७}=\frac{१}{य+४}-\frac{१}{य+९}$, इस में $य=-५\frac{१}{२}$ ।

(७२) $\frac{४}{९(य+४)}-\frac{१}{१८(य+१)}-\frac{७}{१८(य+७)}=\frac{२}{(य+१)(य+४)(य+७)}$,
इस में $य=२$ ।

(७३) $\frac{१}{य^{२}-५य+१७}-\frac{१}{य^{२}+४य+८}=\frac{८य}{य^{४}+६४}$,
इस में $य=९$ ।

(७४) $\frac{य-२}{य-७}+\frac{य-१}{य-६}=\frac{य+२}{य-३}+\frac{य-५}{य-१०}$, इस में $य=६\frac{१}{२}$ ।

(७५) $\frac{३य-७}{४य-११}-\frac{२य-३}{३य-७}=\frac{३य-८}{४(य-३)}-\frac{२(य-२)}{३य-८}$,
इस में $य=२\frac{५}{७}$ ।

(७६) $\frac{य^{२} - ३य + ३}{य - २} + \frac{य^{२} - ९य + २१}{य - ५} = \frac{य^{२} - ५य + ७}{य - ३} + \frac{य^{२} - ७य + १३}{य - ४}$, इस में $य = ३\frac{१}{२}$।

(७७) $\frac{अय}{क} - १ = \frac{कय}{अ}$, इस में $य = \frac{अक}{अ^{२} - क^{२}}$।

(७८) $\frac{य}{अ} + \frac{य}{क} + \frac{य}{ग} = १$, इस में $य = \frac{अकग}{अक + अग + कग}$।

(७९) $\frac{य}{अक} + \frac{य}{अग} + \frac{य}{कग} = \frac{(अ + क)^{२} - ग^{२}}{अकग}$,
इस में $य = अ + क - ग$।

(८०) $\frac{अय}{क} - \frac{ग}{घ} = \frac{चय}{छ} + \frac{ज}{ट}$, इस में, $य = \frac{कछ(गट + घज)}{घट(अछ - कच)}$।

(८१) $\frac{अय}{कग} + \frac{कय}{अग} + \frac{गय}{अक} = अकग$, इस में $य = \frac{अ^{२}क^{२}ग^{२}}{अ^{२} + क^{२} + ग^{२}}$।

(८२) $\frac{य - अ}{क} = \frac{य - क}{अ}$, इस में $य = अ + क$।

(८३) $\frac{य}{अ + क} + \frac{य}{अ - क} = \frac{२अ}{अ^{२} - क^{२}}$, इस में $य = १$।

(८४) $\frac{अय}{क} + \frac{क^{२}}{अ} + य = \frac{अ^{२}}{क} - \frac{कय}{अ}$, इस में $य = अ - क$।

(८५) $\frac{१}{य} = \frac{१}{अ} + \frac{१}{क}$, इस में $य = \frac{अक}{अ + क}$।

(८६) $\frac{अ}{य} + \frac{क}{य} - \frac{ग}{य} = \frac{च}{छ}$, इस में $य = \frac{(अ + क - ग)छ}{च}$।

(८७) $\frac{अ}{क} - \frac{क}{य} = \frac{ग}{अ}$, इस में $य = \frac{अक^{२}}{अ^{२} - कग}$।

(८८) $\frac{अ^{२} - य^{२}}{कय} - अग = अक - \frac{य}{क}$, इस में $य = \frac{अ}{क(क + ग)}$।

(८९) $\frac{१}{य + अ} + \frac{१}{य - अ} = \frac{१}{य^{२} - अ^{२}}$, इस में $य = \frac{१}{२}$।

(९०) $\frac{य + अ}{य - अ} - \frac{य - अ}{य + अ} = \frac{४क}{य^{२} - अ^{२}}$, इस में $य = \frac{क}{अ}$।

(९१) $\frac{\text{अ}(\text{क}-\text{य})}{\text{क}(\text{अ}-\text{य})}=\frac{\text{क}}{\text{अ}}$, इस में $\text{य}=\frac{\text{अक}}{\text{अ}+\text{क}}$ ।

(९२) $\frac{\text{य}+\text{अ}}{\text{य}-\text{क}}+\frac{\text{य}+\text{क}}{\text{य}-\text{अ}}=\text{२}$, इस में $\text{य}=\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{२}}$ ।

(९३) $\frac{\text{य}^{\text{२}}+\text{२}\,\text{अ}^{\text{२}}}{\text{य}^{\text{२}}-\text{अ}^{\text{२}}}-\frac{\text{य}-\text{अ}}{\text{य}+\text{अ}}+\frac{\text{य}+\text{अ}}{\text{य}-\text{अ}}=\text{क}$,

इस में $\text{य}=\frac{\text{अ}(\text{क}+\text{२})}{\text{क}-\text{२}}$

(९४) $\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}-\text{अय}+\text{य}^{\text{२}}}-\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}+\text{अय}+\text{य}^{\text{२}}}=\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{४}}+\text{अ}^{\text{२}}\text{य}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{४}}}$,

इस में $\text{य}=\frac{\text{१}}{\text{२अ}}$ ।

(९५) $\frac{\text{अ}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{य}+\text{अ})}-\frac{\text{क}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{य}+\text{क})}=\frac{\text{ग}}{(\text{य}+\text{अ})(\text{य}+\text{क})}$,

इस में $\text{य}=\text{ग}$ ।

(९६) $\frac{\text{१}}{\text{अ}(\text{अ}-\text{क})(\text{अ}-\text{य})}-\frac{\text{१}}{\text{क}(\text{अ}-\text{क})(\text{क}-\text{य})}$

$+\frac{\text{१}}{\text{य}(\text{अ}-\text{य})(\text{क}-\text{य})}=\frac{\text{१}}{\text{अ}^{\text{२}}\text{क}^{\text{२}}}$, इस में $\text{य}=\text{अक}$ ।

(९७) $\frac{\text{य}+\text{अ}+\text{क}}{(\text{अ}-\text{ग})(\text{क}-\text{ग})(\text{ग}-\text{य})}-\frac{\text{य}+\text{अ}+\text{ग}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{क}-\text{ग})(\text{क}-\text{य})}$

$+\frac{\text{य}+\text{क}+\text{ग}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{अ}-\text{ग})(\text{अ}-\text{य})}=\frac{\text{य}+\text{ग}}{(\text{अ}-\text{य})(\text{क}-\text{य})(\text{ग}-\text{य})}$,

इस में $\text{य}=\text{अ}+\text{क}$ ।

(९८) $\frac{\text{३ अग}}{\text{अ}+\text{क}}+\frac{\text{अ}^{\text{२}}\text{क}}{(\text{अ}+\text{क})^{\text{३}}}+\frac{(\text{२अ}+\text{क})\,\text{कय}}{\text{अ}(\text{अ}+\text{क})^{\text{२}}}=\frac{\text{३ गय}}{\text{क}}+\frac{\text{य}}{\text{अ}}$,

इस में $\text{य}=\frac{\text{अक}}{\text{अ}+\text{क}}$ ।

(९९) $\frac{\text{कगय}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{अ}-\text{ग})(\text{अ}-\text{य})}-\frac{\text{अगय}}{(\text{अ}-\text{क})(\text{क}-\text{ग})(\text{क}-\text{य})}$

$+\frac{\text{अकय}}{(\text{अ}-\text{ग})(\text{क}-\text{ग})(\text{ग}-\text{य})}-\frac{\text{अगय}}{(\text{अ}-\text{य})(\text{क}-\text{य})(\text{ग}-\text{य})}=\frac{\text{अय}-\text{क}}{\text{कय}-\text{ग}}$,

इस में $\text{य}=\frac{\text{क}-\text{ग}}{\text{अ}-\text{क}}$ ।

८५। उद्दिष्ट समीकरण में छेदगम और पक्षान्तरनयन करने से जो अन्त में अव्यक्त का एकघात बचे तो उस की समक्रिया का प्रकार पूर्व प्रक्रमों में दिखलाया। परंतु जो अन्त में अव्यक्त का वर्ग, घन इत्यादि घात बचे तो पक्षान्तरनयन से समीकरण के सब पदों को बांए पक्ष में कर देओ तब अर्थात् दहिना पक्ष शून्य होगा। फिर बांए पक्ष के जो (४१) वे प्रक्रम से शीघ्र खण्ड हो सकें और उन में जो किसी खण्ड में अव्यक्त का एकघात रहे तो उस खण्ड को शून्य के समान करो। तब पूर्वोक्त समक्रिया से जो अव्यक्त का मान आवेगा वही उद्दिष्ट समीकरण में अव्यक्त का मान होगा।

जो उन खण्डों में दो वा तीन इत्यादि अनेक खण्डों में अव्यक्त का एकघात रहे तो हर एक खण्ड को शून्य के समान कर के अलग २ समक्रिया करो तो अव्यक्त के जो दो वा तीन इत्यादि मान आवेंगे इतने उद्दिष्ट समीकरण में अव्यक्त के मान होंगे।

इस की उपपत्ति अति स्पष्ट है। क्यों कि जिस समीकरण का दहिना पक्ष शून्य है उस के बांए पक्ष का जो कोइ खण्ड शून्य हो तो उस बांए पक्ष का मान भी शून्य होगा। यों दोनों पक्ष शून्य के समान एकरूप होंगे। इसलिये उस शून्य तुल्य खण्ड से जो अव्यक्त का मान आवेगा वही (८१) वे प्रक्रम के (५) वे प्रकरण के अनुसार उद्दिष्ट समीकरण में अव्यक्त का मान होगा।

उदा० (१) $४ य^२ - ५ य = ३ य - य^२$, इस में य क्या है?

यहां पक्षान्तरनयन से, $५ य^२ - २ य = ०$

$$\therefore \quad य (५ य - २) = ०$$

$$\therefore य = ० \text{ और } ५ य - २ = ० \quad \therefore य = \frac{२}{५}।$$

उदा० (२) $य^२ = ९$, इस में, य क्या है?

पक्षान्तरनयन से, $य^२ - ९ = ०$

$$\therefore \quad (य - ३)(य + ३) = ०$$

$\therefore$ य $-$ ३ $=$ ० और $\therefore$ य $=$ ३ ।

और भी य $+$ ३ $=$ ० $\therefore$ य $= -$ ३ ।

उदा० (३) य$^{२} =$ ९ य $-$ २०, इस में य क्या है?

पक्षान्तरनयन से, य$^{२} -$ ९ य $+$ २० $=$ ०

(४१) वे प्रक्रम से, (य $-$ ४) (य $-$ ५) $=$ ०

$\therefore$ य $-$ ४ $=$ ० और य $=$ ४ और य $-$ ५ $=$ ० $\therefore$ य $=$ ५ ।

उदा० (४) $\frac{\text{य}^{२} - ४}{\text{य} - २}$ $=$ २ य $-$ २, इस में य क्या है?

छेदगम से, य$^{२} -$ ४ $=$ (२ य $-$ २) (य $-$ २)

$\therefore$ (य $+$ २) (य $-$ २) $=$ (२ य $-$ २) (य $-$ २)

वा, (२ य $-$ २) (य $-$ २) $-$ (य $+$ २) (य $-$ २) $=$ ०

वा, (य $-$ ४) (य $-$ २) $=$ ०

$\therefore$ य $-$ ४ $=$ ०, य $=$ ४ और य $-$ २ $=$ ०, य $=$ २ ।

उदा० (५) य$^{३} -$ ६ $=$ य, इस में य क्या है?

पक्षान्तरनयन से, य$^{३} -$ य $-$ ६ $=$ ०

वा, य$^{३} -$ ८ $-$ य $+$ २ $=$ ०

$\therefore$ (य $-$ २) (य$^{२} +$ २ य $+$ ४) $-$ (य $-$ २) $=$ ०

वा, (य $-$ २) (य$^{२} +$ २ य $+$ ३) $=$ ०

$\therefore$ य $-$ २ $=$ ० और $\therefore$ य $=$ २ ।

उदा० (६) य $+ \frac{१}{\text{य}} =$ २, इस में य क्या है?

छेदगम से, य$^{२} +$ १ $=$ २ य

पक्षान्तर०, य$^{२} -$ २ य $+$ १ $=$ ०

$\therefore$ (य $-$ १) (य $-$ १) $=$ ०

$\therefore$ य $-$ १ $=$ ० और य $=$ १ ।

उदा॰ (७) $५य - \frac{५}{य} = ३य - ३$, इस में य क्या है?

छेदगम से, $५(य^२ - १) = ३य(य - १)$

वा, $५(य^२ - १) - ३य(य - १) = ०$

वा, $५(य + १)(य - १) - ३य(य - १) = ०$

$\therefore$ $(२य + १)(य - १) = ०$

$\therefore$ $२य + १ = ०, य = -\frac{१}{२}$ और $य - १ = ०, य = १$।

उदा॰ (८) $य^२ - \left(\frac{य^२ + अ^२ - क^२}{२अ}\right)^२ = ०$, इस में य का मान क्या है?

यहां, $य^२ - \left(\frac{य^२ + अ^२ - क^२}{२अ}\right)^२ = \frac{(२अय)^२ - (य^२ + अ^२ - क^२)^२}{४अ^२}$

$$= \frac{(२अय + य^२ + अ^२ - क^२)(२अय - य^२ - अ^२ + क^२)}{४अ^२}$$

$$= \frac{\{(य + अ)^२ - क^२\}\{क^२ - (य - अ)^२\}}{४अ^२}$$

$$= \frac{(य + अ + क)(य + अ - क)(य - अ + क)(अ + क - य)}{४अ^२}$$

$= ०$

वा, $(य + अ + क)(य + अ - क)(य - अ + क)(अ + क - य) = ०$

$\therefore$ $य + अ + क = ०, य + अ - क = ०, य - अ + क = ०$ और $अ + क - य = ०$.

$\therefore$ $य = -अ - क$, वा $-अ + क$; वा $अ - क$; वा $अ + क$।

उदा॰ (९) $य^२ - \frac{१}{य^२} = \left(अ + \frac{१}{य}\right)\left(य - \frac{१}{य}\right)$, इस में य क्या है?

यहां, $\left(य + \frac{१}{य}\right)\left(य - \frac{१}{य}\right) - \left(अ + \frac{१}{य}\right)\left(य - \frac{१}{य}\right) = ०$

वा, $(य - अ)\left(य - \frac{१}{य}\right) = ०$

वा, $(य - अ)(य^२ - १) = ०$

वा, $(य-अ)(य+१)(य-१)=०$

$\therefore$ $य-अ=० \therefore य=अ, य+१=०, \therefore य=-१$

और $य-१=० \therefore य=१$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $५य^{२}-७य=३य^{२}+१३य$, इस में $य=०$ और १० ।

(२) $य^{३}=८$, इस में $य=२$ ।

(३) $अय^{२}+गय=कय-घय^{२}$, इस में $य=०$ और $\frac{क-ग}{अ+घ}$ ।

(४) $(य-अ)^{२}-क^{२}=०$, इस में $य=अ\pm क$ ।

(५) $२(य-अ)^{२}=य^{२}-अ^{२}$, इस में $य=३अ$, और $अ$ ।

(६) $य^{३}+य=२$, इस में $य=१$ ।

(७) $य^{२}=४(२य-३)$, इस में $य=२$ और ६ ।

(८) $य(य^{२}+११)=६(य^{२}+१)$, इस में $य=२$ ।

(९) $\frac{य^{३}+१}{य+१}=य^{२}-३य+७$, इस में $य=-१$ और ३ ।

(१०) $(य-२)^{३}=य^{३}-८$, इस में $य=२$ और ० ।

(११) $\frac{य^{२}-९}{५}=(य-३)(य-५)$, इस में $य=३$ और ७ ।

(१२) $\frac{९य^{२}-४९}{३य-७}=२य+११$, इस में $य=४$ और $२\frac{१}{२}$ ।

(१३) $\frac{य-३}{य-४}-\frac{य-२}{य-३}=\frac{य-१}{१९य-१२}$, इस में $य=०$ और ८ ।

(१४) $\frac{य-१}{४-य}+\frac{५-य}{य-२}=\frac{८\frac{१}{४}-२य}{य-३}$, इस में $य=०$ और $३\frac{१}{२}$ ।

(१५) $\frac{य-४}{य^{३}-२२४}+\frac{य+६}{य+७}=\frac{य+७}{य+८}$, इस में $य=०$ और $\frac{४}{११}$ ।

(१६) $\frac{१}{य-२}-\frac{६}{य-३}+\frac{६}{य-४}=\frac{२य^{२}-७य}{(य-२)(य-३)(य-४)}$,

इस में $य=०$ और ६ ।

(१०) $\frac{अ-१}{(अ-क)(अ-ग)(य+अ)} + \frac{ग-१}{(अ-ग)(क-ग)(य+ग)}$

$= \frac{क-१}{(अ-क)(क-ग)(य+क)} - \frac{य^2-१}{(य+अ)(य+क)(य+ग)}$,

इस में य=२ और −१ ।

३ अनेकवर्ण एकघातसमीकरण ।

८६ । अनेकवर्ण समीकरण तीन प्रकार के होते हैं ।

(१) जिन अनेकवर्ण समीकरणों में जितने अव्यक्त हों उतने हि समीकरण होते हैं वे प्रथम प्रकार के हैं ।

इन में अव्यक्तों के मान नियत रहते हैं अर्थात् एकघातसमीकरणों में प्रत्येक अव्यक्तों का मान एक हि रहता है, वर्गसमीकरणों में दो इत्यादि ।

(२) जिन में अव्यक्तों से समीकरण न्यून हैं वे दूसरे प्रकार के हैं ।

इन में प्रत्येक अव्यक्त के मान अनन्त रहते हैं ।

(३) और जिन में अव्यक्तों से समीकरण अधिक हों वे तीसरे प्रकार के हैं ।

इन में समीकरण अशुद्ध होते हैं अथवा अशुद्ध न हों तो अधिक समीकरण व्यर्थ होते हैं ।

अब प्रथम प्रकार के समीकरणों की समक्रिया के लिये निर्दिष्ट अनेक समीकरणों से ऐसा एक हि समीकरण उत्पन्न करना चाहिये कि जिस में एक हि अव्यक्त रहे । यह समीकरण वक्ष्यमाण तीन रीतिओं में चाहो उस से उत्पन्न हो सकता है ।

(१) अनेक समीकरणों में जो एक हि अव्यक्त हो उस के उन्मितिओं का साम्य करने से प्रथम रीति बनती है ।

(२) उत्थापन से दूसरी रीति बनती है ।

(३) अनेक समीकरणों में जो एक हि अव्यक्त होगा उस के वारद्योतकों को समान करने से तीसरी रीति बनती है ।

अनेकवर्ण एकघातसमीकरण की समक्रिया जिस में दो अव्यक्त हैं ।

८७ । प्रथम रीति । प्रत्येक समीकरण से एक हि अव्यक्त की उन्मिति निकालो फिर उन दो उन्मितिओं को समान करने से एक समीकरण उत्पन्न होगा इस में दूसरा हि अव्यक्त रहेगा* । तब पूर्व समक्रिया से उस का मान तुरंत निकलेगा फिर उत्थापन से पहिले अव्यक्त का भी मान ज्ञात होगा । जैसा नीचे दिये हुए उदाहरणों में ।

उदा० (१) $\left\{\begin{array}{l}३य+४र=३२\\५य-६र=२८\end{array}\right\}$ इस में य और र का मान क्या है?

यहां (१) और (२) ये दो चिह्न क्रम से प्रथम और द्वितीय समीकरण के द्योतक मानो तब (८३) वे प्रक्रम से

$$\left.\begin{array}{ll}(१)\ से, & य=\frac{३२-४र}{३}\\(२)\ से, & य=\frac{२८+६र}{५}\end{array}\right\}$$ ये दो य की उन्मिति हैं ।

$$\therefore \quad \frac{३२-४र}{३}=\frac{२८+६र}{५}$$

छेदगम से, $१६०-२०र=८४+१८र$

पक्षान्तरनयन से, $१८र+२०र=१६०-८४$

वा, $३८र=७६ \quad \therefore\ र=२$

और $य=\frac{३२-४र}{३}$ इस में र के मान का उत्थापन करने से

$$य=\frac{३२-४\times२}{३}=\frac{३२-८}{३}=\frac{२४}{३}=८$$

$$वा,\ =\frac{२८+६र}{५}=\frac{२८+६\times२}{५}=\frac{२८+१२}{५}=\frac{४०}{५}=८ ।$$

* इस की युक्ति (१८) वे प्रक्रम के (१) ली प्रत्यक्ष बात से स्पष्ट है ।

(१) से, र की उन्मिति $र = \frac{३२ - ३य}{४}$

(२) से, ... $र = \frac{५य - २८}{६}$

$\therefore \quad \frac{३२ - ३य}{४} = \frac{५य - २८}{६}$

छेदगम से, $९६ - ९य = १०य - ५६$

$\therefore \quad १९य = १५२$ और $य = \frac{१५२}{१९} = ८$

तब उत्थापन से, $र = \frac{३२ - ३य}{४} = \frac{३२ - २४}{४} = \frac{८}{४} = २$

वा, $= \frac{५य - २८}{६} = \frac{४० - २८}{६} = \frac{१२}{६} = २$।

इस प्रकार से यहां $य = ८$ और $र = २$

उदा० (२) $$\left.\begin{aligned} ५य + \frac{३य - २र}{७} &= १६ \\ \frac{५य - २र}{२} - \frac{३य + १६}{५} &= १\tfrac{१}{२} \end{aligned}\right\}$$ इस में य और र का मान क्या है?

इस में छेदगम और यथासंभव सवर्णन करके

(१) से, $३८य - २र = ११२ \quad \therefore \quad य = \frac{२र + ११२}{३८}$

(२) से, $१९य - १०र = ४७ \quad \therefore \quad य = \frac{१०र + ४७}{१९}$

$\therefore \quad \frac{२र + ११२}{३८} = \frac{१०र + ४७}{१९}$

छेदगम से, $२र + ११२ = २०र + ९४$

$\therefore \quad १८र = १८$ और $र = १$

पूर्ववत् उत्थापन से, $य = ३$

अथवा इस में र की उन्मितिओं को परस्पर समान करने से भी य और र के मान वे ही आवेंगे।

उदा० (३) $$\left.\begin{aligned} \frac{यर}{य + र} &= ६ \\ \frac{रय}{य - र} &= ३० \end{aligned}\right\}$$ इस में य और र क्या हैं?

(१) से $यर = ६य + ६र$

$\therefore$ $यर - ६य = ६र$ और $य = \frac{६र}{र - ६}$

इसी भांति (२) से $य = \frac{३०र}{३० - र}$

$\therefore$ $\frac{६र}{र - ६} = \frac{३०र}{३० - र}$

वा, $\frac{१}{र - ६} = \frac{५}{३० - र}$

छेदगम इत्यादि कर्म करने से, $र = १०$ $\therefore$ $य = १५$

उदा० (४) $\left.\begin{array}{l} अय + कर = ग \\ चय + छर = ज \end{array}\right\}$ इस में य और र क्या हैं?

(१) से, $य = \frac{ग - कर}{अ}$

(२) से, $य = \frac{ज - छर}{च}$

$\therefore$ $\frac{ग - कर}{अ} = \frac{ज - छर}{च}$

छेदगम से, $गच - कचर = अज - अछर$

$\therefore$ $(अछ - कच)र = अज - गच$, $\therefore$ $र = \frac{अज - गच}{अछ - कच}$

$\therefore$ $य = \frac{ज - छर}{च} = \frac{ज}{च} - \frac{छ}{च} \times र = \frac{ज}{च} - \frac{छ}{च} \times \frac{अज - गच}{अछ - कच}$

$= \frac{अछज - कचज}{च(अछ - कच)} - \frac{अछज - गचछ}{च(अछ - कच)}$

$= \frac{गचछ - कचज}{च(अछ - कच)} = \frac{गछ - कज}{अछ - कच}$

इसी भांति य के दूसरी उन्मिति में भी र के मान का उत्थापन करने से य का वही मान मिलेगा ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\left.\begin{array}{l} २य + ३र = १२ \\ ३य + ४र = १७ \end{array}\right\}$ इस में $\left\{\begin{array}{l} य = ३ \\ र = २ \end{array}\right.$ ।

(२) $\left.\begin{array}{l} ४य - ५र = ३५ \\ ३य + ७र = ३७ \end{array}\right\}$ इस में $\left\{\begin{array}{l} य = १० \\ र = १ \end{array}\right.$ ।

(३) $\left.\begin{matrix} ३ य = ३१ - ५ र \\ २ र = ७ य - ४५ \end{matrix}\right\}$ इस में $\left\{\begin{matrix} य = ७ \\ र = २ \end{matrix}\right.$ ।

(४) $\left.\begin{matrix} य + \frac{र + २}{३} = ९ \\ ३ \frac{य - १}{४} + २ र = १३ \end{matrix}\right\}$ इस में $\left\{\begin{matrix} य = ७ \\ र = ४ \end{matrix}\right.$

(५) $\left.\begin{matrix} \frac{य + २ र}{५} - \frac{२ य - ३}{७} = १ \\ ५ य - \frac{१७ - २ र}{९} = ७० - \frac{१२ य - १}{१३} \end{matrix}\right\}$ इस में $\left\{\begin{matrix} य = १२ \\ र = ४ \end{matrix}\right.$ ।

(६) $\left.\begin{matrix} यर + ४० = (य + २)(र + ३) \\ यर - ७ = (य + ३)(र - २) \end{matrix}\right\}$ इस में $\left\{\begin{matrix} य = ८ \\ र = ५ \end{matrix}\right.$ ।

(७) $\left.\begin{matrix} \frac{२}{य} + \frac{३}{र} = ४ \\ \frac{३}{य} + \frac{२}{र} = ३\frac{१}{२} \end{matrix}\right\}$ इस में $\left\{\begin{matrix} य = २ \\ र = १ \end{matrix}\right.$ ।

(८) $\frac{यर}{य + र} = २$, और $\frac{१}{य} - \frac{१}{र} = \frac{१}{६}$, इस में य = ३ और र = ६ ।

(९) $\frac{य}{र} = \frac{य}{र + ४} + \frac{१}{२}$ और $\frac{य}{र} = \frac{य}{र - ३} - \frac{१}{२}$, इस में $\begin{matrix} य = ८४ \\ र = २४ \end{matrix}$ ।

(१०) $\left.\begin{matrix} अय + कर = अ^२ + क^२ \\ कय + अर = २ अक \end{matrix}\right\}$ इस में $\left\{\begin{matrix} य = अ \\ र = क \end{matrix}\right.$ ।

(११) $\left.\begin{matrix} कय - गर = ग^२ - क^२ \\ गय - कर = \frac{(अ^२ + क^२ + ग^२)(ग^२ - क^२)}{कग} \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} य = \frac{अ^२ + ग^२}{क} \\ र = \frac{अ^२ + क^२}{ग} \end{matrix}$ ।

८८ । दूसरी रीति । निर्दिष्ट समीकरणों में जिस अव्यक्त की उन्मिति थोड़े आयास में मिल सके उस को निकाल के उस का उस के दूसरे समीकरण में उत्थापन करो। इस से ऐसा एक समीकरण उत्पन्न होगा कि जिस में एक हि अव्यक्त हो तब पूर्व समक्रिया से दोनों अव्यक्तों के माने शीघ्र ज्ञात होंगे ।

उदा० (१) $\left.\begin{matrix} ३ य + ४ र = ३२ \\ ५ य - ६ र = २८ \end{matrix}\right\}$ इस में य और र क्या हैं ?

यहां (१) से य की उन्मिति $य = \frac{३२ - ४र}{३}$ इस से (२) में उत्थापन करने से, $५\left\{\frac{३२ - ४र}{३}\right\} - ६र = २८$

तब पूर्वोक्त रीति से, र = २ और उत्थापन से य = ८ ।

उदा० (२) $\left.\begin{array}{l} ५य + \frac{३य - २र}{७} = १६ \\ \frac{५य - २र}{२} - \frac{३य + १६}{५} = १\frac{१}{२} \end{array}\right\}$ इस में य और र इन का मान क्या है?

यहां छेदगम और यथासंभव सवर्णन करके

(१) से, ३८य − २र = ११२, (२) से १९य − १०र = ४७

∴ $य = \frac{१०र + ४७}{१९}$ इस सवर्णित किये हुए (१) ले में उत्थापन करने से

$$३८\left\{\frac{१०र + ४७}{१९}\right\} - २र = ११२$$

तब पूर्व रीति से, र = १ और उत्थापन से, य = ३ ।

उदा० (३) $\left.\begin{array}{l} \frac{यर}{य + र} = ६ \\ \frac{यर}{य - र} = ३० \end{array}\right\}$ इस में य और र क्या है?

(१) से $य = \frac{६र}{र - ६}$ इस का (२) में उत्थापन करने से

$$\frac{\left(\frac{६र}{र - ६}\right) \times र}{\frac{६र}{र - ६} - र} = ३०$$

सवर्णन से, $\frac{६र^२}{६र - र^२ + ६र} = \frac{६र}{१२ - र} = ३०$

∴ ६र = ३६० − ३०र ∴ र = १० और उत्थापन से य = १५ ।

अथवा यहां (१) से यर = ६य + ६र ... ... (३)

(२) से यर = ३०य − ३०र ... ... (४)

∴ ३०य − ३०र = ६य + ६र ∴ २४य = ३६र, $य = \frac{३}{२}र$ इस से (३) में उत्थापन करने से, $\frac{३}{२}र^२ = ९र + ६र$

वा, $३र=३०$ $\therefore र=१०$ और $य=१५$ ।

उदा० (४) $\left.\begin{array}{l} अय+कर=ग \\ चय+छर=ज \end{array}\right\}$ इस में य और र क्या है?

(१) से, $य=\dfrac{ग-कर}{अ}$

(२) में उत्थापन से, $च\times\dfrac{ग-कर}{अ}+छर=ज$

पृथक्करण से, $र=\dfrac{अज-गच}{अछ-कच}$ तब $य=\dfrac{गछ-कज}{अछ-कच}$.

इस में अ, क, ग, च, छ और ज ये व्यक्त हैं । अब इन में जो प्रत्येक अ, क और $च=१$ और $छ=-१$ माना तो

उत्थापन से, $य=\dfrac{गछ-कज}{अछ-कच}=\dfrac{-ग-ज}{-१-१}=\dfrac{ग+ज}{२}=\dfrac{१}{२}ग+\dfrac{१}{२}ज$

और $र=\dfrac{अज-गच}{अछ-कच}=\dfrac{ज-ग}{-१-१}=\dfrac{ग-ज}{२}=\dfrac{१}{२}ग-\dfrac{१}{२}ज$

और जो $छ=अ$, $च=क$ और $ज=ग$ माना तो निर्दिष्ट समी-करण $\left.\begin{array}{l} अय+कर=ग \\ कय+अर=ग \end{array}\right\}$ इस भांति के होंगे ।

और $य=\dfrac{गछ-कज}{अछ-कच}=\dfrac{अग-कग}{अ^२-क^२}=\dfrac{ग}{अ+क}$

$र=\dfrac{अज-गच}{अछ-कच}=\dfrac{अग-कग}{अ^२-क^२}=\dfrac{ग}{अ+क}$

$\therefore$ इस में $य=र=\dfrac{ग}{अ+क}$ ।

और इस में जो $अ=-क$ माना तो $य=र=\dfrac{ग}{-क+क}=\dfrac{ग}{०}=\infty$ इस प्रकार से य और र ये दोनो अनन्त होंगे ।

इसी भांति उत्थापन से य, र के मान अनेक प्रकार के निकलेंगे ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\left.\begin{array}{l} य+३र=१५ \\ २य-र=२ \end{array}\right\}$ इस में $य=३$ और $र=४$ ।

(२) $\left.\begin{array}{l} २य = १७ - ३र \\ ७र = ९य + २६ \end{array}\right\}$ इस में $\left\{\begin{array}{l} य = १ \\ र = ५ \end{array}\right.$ ।

(३) $\frac{१}{३}य + \frac{१}{५}र = ७$, और $\frac{१}{४}य + \frac{१}{३}र = ८$ इस में $\left\{\begin{array}{l} य = १२ \\ र = १५ \end{array}\right.$ ।

(४) $\left.\begin{array}{l} \frac{य + ४}{५} - \frac{र + ३}{७} = ३ \\ \frac{य - ५}{६} - \frac{र - ७}{८} = २ \end{array}\right\}$ इस में $\left\{\begin{array}{l} य = ४१ \\ र = ३९ \end{array}\right.$ ।

(५) $\frac{य + १}{र} = \frac{१}{२}$ और $\frac{य}{र + १} = \frac{१}{३}$ यहां य = ३ और र = ८ ।

(६) $\left.\begin{array}{l} \frac{य - २र + १९}{३य - र + ७} = \frac{२य - ४र + २९}{६य - २र + ५} \\ \frac{य + ५र + ३}{३य + १५र + ३} = \frac{२य - र + १३}{६य - ३र + ३२} \end{array}\right\}$ इस में $\left\{\begin{array}{l} य = ५ \\ र = २ \end{array}\right.$ ।

८९ । तीसरी रीति । पहिले प्रत्येक समीकरण में छेदगम, इत्यादि कर्म करके यथासंभव सवर्णन करो । तब दोनों समीकरण के एक ही अव्यक्त के दो वारद्योतकों से परस्पर के समीकरण गुण देओ अथवा संभव हो तो अपवर्तित वारद्योतकों से परस्पर के समीकरण गुण देओ। तब उन दोनों समीकरणों में उस अव्यक्त के वारद्योतक समान होंगे। फिर उन वारद्योतकों के चिह्न जो सजातीय हों तो उन गुणे हुए समीकरणों का अन्तर करो और जो विजातीय हों तो योग करो । इस से एक समीकरण ऐसा उत्पन्न होगा कि जिस में एक ही अव्यक्त होवे तब उक्त विधि से दोनों अव्यक्तों के मान शीघ्र ज्ञात होंगे ।

उदा० (१) $\left.\begin{array}{l} ३य + ४र = ३२ \\ ५य - ६र = २८ \end{array}\right\}$ इस में य और र क्या हैं?

यहां य के वारद्योतकों से परस्पर के समीकरणों को गुण देने से,

$\left.\begin{array}{l} १५य + २०र = १६० \\ १५य - १८र = ८४ \end{array}\right\}$ यहां समान वारद्योतकों के चिह्न सजातीय हैं ∴ अन्तर करने से, ३८र = ७६ ∴ र = २

इस से (१) उत्थापन करने से, ३य + ८ = ३२, ३य = २४ ∴ य = ८।

इस प्रकार से इस में य = ८ और र = २ ।

अथवा र के वारद्योतक ४, ६ दो से अपवर्तित करके २, ३ इस से परस्पर के समीकरणों को गुण देने से,

$$\left.\begin{array}{l} ९ य + १२ र = ९६ \\ १० य - १२ र = ५६ \end{array}\right\}$$ यहां समान वारद्योतकों के चिह्न विजातीय हैं ∴ समीकरणों का योग करने से, $१९ य = १५२$ ∴ $य = ८$ उत्थापन से, $र = २$।

उदा० (२) $$\left.\begin{array}{l} ५ य + \frac{३ य - २ र}{७} = १६ \\ \frac{५ य - २ र}{२} - \frac{३ य + १६}{५} = १ \frac{१}{२} \end{array}\right\}$$ इस में य और र का मान क्या है?

इस में छेदगम और यथासंभव सवर्णन करके

$$\left.\begin{array}{ll} (१) \text{ से, } & ३८ य - २ र = ११२ \\ (२) \text{ से, } & १९ य - १० र = ४७ \end{array}\right\}$$ इस में य के वारद्योतक ३८, १९ अपवर्तित करके २, १ इन से परस्पर के समीकरणों को गुण देने से, $३८ य - २ र = ११२$

$$३८ य - २० र = ९४$$

अन्तर करने से, $$१८ र = १८$$

∴ $र = १$ और उत्थापन से $य = ३$।

उदा० (३) $$\left.\begin{array}{l} \frac{यर}{य + र} = ६ \\ \frac{यर}{य - र} = ३० \end{array}\right\}$$ इस में य और र क्या हैं?

यहां $$\left.\begin{array}{ll} (१) \text{ से, } & (र - ६) य = ६ र \\ (२) \text{ से, } & (३० - र) य = ३० र \end{array}\right\}$$ इस में य के वारद्योतकों से परस्पर के समीकरणों को गुणदेने से, $(३० - र)(र - ६) य = ६ र (३० - र)$

$$(३० - र)(र - ६) य = ३० र (र - ६)$$

अन्तर करने से, $० = ६ र (३० - र) - ३० र (र - ६)$

∴ $३० र (र - ६) = ६ र (३० - र)$, वा $५ (र - ६) = ३० - र$

∴ समक्रिया से $र = १०$ और उत्थापन से $य = १५$।

अथवा इस भांति के समीकरण की समक्रिया करने की एक सुलभ रीति है सेा ऐसी ।

प्रथम समीकरण के दोनों पक्षों के अंश और छेद को पलट देने से,

$$\frac{य+र}{यर}=\frac{१}{६}, \text{ वा, } \frac{१}{र}+\frac{१}{य}=\frac{१}{६} \quad (३)$$

इसी भांति दूसरे से, $\frac{१}{र}-\frac{१}{य}=\frac{१}{३०}$ (४)

(३) और (४) इन का योग और अन्तर करने से,

$$\frac{२}{र}=\frac{६}{३०}=\frac{१}{५} \text{ और } \frac{२}{य}=\frac{४}{३०}=\frac{२}{१५}$$

$\therefore$ $र=१०$ और $य=१५$ ।

उदा० (४) $४य=४र^२+१$ और $र+२=\dfrac{४य+३१}{४(र+१)}$

इस में य और र इन का मान क्या है?

(१) से, $४य=४र^२+१$

(२) से, $४य=४र^२+१२र-२९$

$\therefore$ अन्तर करने से $०=-१२र+३०$, वा, $१२र=३०$

$\therefore$ $र=२\frac{१}{२}$ और उत्थापन से $य=६\frac{१}{२}$ ।

उदा० (५) $\left.\begin{array}{l} अय+कर=ग \\ चय+छर=ज \end{array}\right\}$ इस में य और र क्या हैं?

इस में य के वारद्योतक अ और च इन से परस्पर के समीकरणों को गुण देने से, $अचय+कचर=गच$

और $अचय+अछर=अज$

$\therefore$ अन्तर करने से $(कच-अछ)र=गच-अज$

$$\therefore\ र=\frac{गच-अज}{कच-अछ}=\frac{अज-गच}{अछ-कच},$$

और उत्थापन से, $य=\dfrac{कज-गछ}{कच-अछ}=\dfrac{गछ-कज}{अछ-कच}$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $\left.\begin{array}{l} ३ य + ४ र = ३८ \\ ६ य - र \;\; = ३१ \end{array}\right\}$ इस में य = ६ और र = ५ ।

(२) $\left.\begin{array}{l} ३ य = ५ र - ४६ \\ २ र = ९ य - ८३ \end{array}\right\}$ इस में य = १३ और र = १७ ।

(३) $\frac{य}{३} + \frac{र}{४} = ७\frac{३}{४}$, $\frac{य}{४} - \frac{र}{६} = \frac{१}{२}$, इस में य = १२, और र = १५ ।

(४) $\left.\begin{array}{l} ५ य + \frac{र + ४}{५} = ८३ \\ ३ र - \frac{य - ७}{९} = ३२ \end{array}\right\}$ इस में य = १६ और र = ११ ।

(५) $\frac{३ यर}{य + २ र} = \frac{३}{२}$ और $४ य - \frac{३}{र} य = २$, इस में य = २, र = १ ।

(६) $\frac{अ}{क + र} = \frac{क}{अ + य}$ और $अय + कर = ग^२$; इस में

$$य = \frac{क^२ - अ^२ + ग^२}{२ अ} \text{ और } र = \frac{अ^२ - क^२ + ग^२}{२ क} ।$$

(७) $\left.\begin{array}{l} \frac{अ + क}{य} - \frac{अ - क}{र} = ४ \\ \frac{अ - क}{य} + \frac{अ + क}{र} = २ \end{array}\right\}$ इस में $\begin{array}{l} य = \frac{अ^२ + क^२}{३ अ + क} \\ र = \frac{अ^२ + क^२}{३ क - अ} \end{array}$ ।

८७, ८८ और ८९ । इन तीनेा प्रक्रमों में जिन उदाहरणों का समक्रिया से गणित करके दिखलाया है वे तीनों रीतिओं में समान हि लिखे हैं । इस का कारण यह है कि किस उदाहरण की समक्रिया किस रीति से शीघ्र बनती है यह सीखनेहारा देखे और अपनी बुद्धि से विचारे तब और उस जाति के उदाहरणों में उसी रीति को लगावे ।

९० । किसी किसी स्थल में एक समीकरण के दो पक्षों का दूसरे समीकरण के दोनेा पक्षों में भाग देने से एक समीकरण ऐसा उत्पन्न होता है कि जिस से अव्यक्तों का मान थोड़ी क्रिया से निकलता है ।

जैसा $य^2 - र^2 = २१ \cdots \cdots \cdots$ (१)

$य + र = ७ \cdots \cdots \cdots$ (२)

इस में (१) के दोनों पक्षों में (२) के दोनों पक्षों का भाग देने से

$$य - र = ३ \qquad (३)$$

तब (२) और (३) इन से $य = ५$ और $र = २$।

और ऊपर कीं रीतिओं के तीसरे उदाहरण में

(१) से $$(र - ६) य = ६ र \qquad (३)$$

(२) से $$(३० - र) य = ३० र \qquad (४)$$

(३) के दोनों पक्षों में (४) के पक्षों का भाग देने से

$$\frac{(र-६)य}{(३०-र)य} = \frac{६ र}{३० र}, \text{ वा, } \frac{र-६}{३०-र} = \frac{१}{५}$$

तब समक्रिया से, $र = १०$, और उत्थापन से $य = १५$।

इस भांति अनेक लाघव के प्रकार हैं वे समक्रिया के अति अभ्यास से आप से आप मन में प्रकट होते हैं।

अभ्यास के लिये और उदाहरण।

(१) $\left.\begin{array}{l} य + र = २४ \\ य - २ र = ३ \end{array}\right\}$ इस में $य = १७$ और $र = ७$।

(२) $\left.\begin{array}{r} य + १२ र = ६७ \\ ३ य + \quad र = २६ \end{array}\right\}$ इस में $य = ७$ और $र = ५$।

(३) $\left.\begin{array}{l} ४ य - ७ र = ३० \\ २ य - ९ र = ४ \end{array}\right\}$ इस में $य = ११$ और $र = २$।

(४) $\left.\begin{array}{l} १५ य + २८ र = २४७ \\ १८ य - ३५ र = २२ \end{array}\right\}$ इस में $य = ९$ और $र = ४$।

(५) $\left.\begin{array}{l}\frac{य}{५} + \frac{र}{८} = १५ \\ \frac{य}{७} + \frac{र}{७} = १२\end{array}\right\}$ इस में य = ३५ और र = ५६ ।

(६) $\left.\begin{array}{l}\frac{३य}{४} + \frac{४र}{५} = ५९ \\ \frac{२य}{९} = \frac{९र}{१०} - २८\end{array}\right\}$ इस में य = ३६ और र = ४० ।

(७) $\left.\begin{array}{l}\frac{२य}{७} + \frac{र}{३} = ११ \\ \frac{४य}{५} - \frac{र}{७} = १३\end{array}\right\}$ इस में य = $१९\frac{२३}{११३}$ और र = $१६\frac{६१}{११३}$ ।

(८) $\left.\begin{array}{l}८य + \frac{५र}{१२} = १३८ \\ ६र + \frac{३य}{८} = १५०\end{array}\right\}$ इस में य = १६ और र = २४ ।

(९) $\left.\begin{array}{l}\frac{५य + २}{७} - २र + १७ = ५ \\ \frac{८र - ७}{१३} + ३य - १९ = १०\end{array}\right\}$ इस में य = ८ और र = ९ ।

(१०) $\left.\begin{array}{l}\frac{३य - ४}{५} + \frac{४र + २}{७} = १३ \\ \frac{५य + १}{६} + \frac{३र - ६}{७} = ८\end{array}\right\}$ इस में य = १३ और र = १० ।

(११) $\left.\begin{array}{l}\frac{८य - ३र}{९} + \frac{५य + ८र}{१२} = १७ \\ \frac{९य + ५र}{८} - \frac{७य + ४र}{१०} = ६\end{array}\right\}$ इस में य = १२ और र = ४ ।

(१२) $\left.\begin{array}{l}\frac{११य + ७र}{१२} - \frac{८य - १३र}{१५} = ७६ - \frac{५य + ९र}{२०} \\ \frac{१३य - ३र}{२०} + \frac{७य + ९र}{२४} = ५८ + \frac{३य + १७र}{३०}\end{array}\right\}$

इस में य = ७५ और र = १५ ।

(१३) $\left.\begin{array}{l}८य - १७ - \frac{४र - ७}{१३} = १५ - \frac{५य - १}{१९} \\ १२र - १५ + \frac{३(२य + ३)}{११} = ५० - \frac{७र + १९}{२७}\end{array}\right\}$ इस में $\begin{array}{l}य = ४ \\ र = ५\end{array}$ ।

(१४) $\left.\begin{aligned} \frac{५य-७र+४}{६}-\frac{४य-१३र+३२}{९}&=२ \\ \frac{७य+२र-४}{१२}-\frac{१५य-१२र+१}{१६}&=१ \end{aligned}\right\}$ इस में $\begin{aligned} य&=९ \\ र&=५ \end{aligned}$ ।

(१५) $\left.\begin{aligned} २य-२९-\frac{५य+७र}{१०}&=९र+१३+\frac{११य-६र}{१६} \\ \frac{७य+५र}{१२}-३र-५&=\frac{८य+३र}{१४}-११य+५२४७० \end{aligned}\right\}$

इस में $य=४८७२$ और $र=४२०$ ।

(१६) $\left.\begin{aligned} \frac{\frac{५य}{८}+७र}{१७}-\frac{\frac{४य+७}{१३}+\frac{७र+३}{११}}{९}&=६-\frac{र}{३} \\ \frac{\frac{३य}{४}+\frac{२र}{३}-३\frac{१}{२}}{\frac{५य}{१२}-\frac{७र}{६}+१\frac{१}{३}}&=\frac{५१}{६५} \end{aligned}\right\}$

इस में $य=८$ और $र=९$ ।

(१७) $\left.\begin{aligned} ३९+\frac{६य-\frac{४र+५}{७}}{१९}&=४य+\frac{६र+८-\frac{५य+४}{९}}{१३} \\ \frac{५य+७र-६}{१२}&=४+\frac{८य-१३र+२}{१५} \end{aligned}\right\}$

इस में $य=१०$ और $र=४$ ।

(१८) $\left.\begin{aligned} \frac{२५}{य}+\frac{१८}{र}&=११ \\ \frac{३}{४य}-\frac{२}{५र}&=\frac{१}{६०} \end{aligned}\right\}$ इस में $य=५$ और $प=३$ ।

(१९) $\left.\begin{aligned} \frac{यर}{७य-८र}&=\frac{१}{३} \\ \frac{५यर}{७य+६र}&=\frac{१}{२} \end{aligned}\right\}$ इस में $य=२$ और $र=१$ ।

(२०) $\left.\begin{aligned} \frac{य}{र}&=\frac{य}{र+४}+१ \\ \frac{य}{र}&=\frac{य}{र-२}-१ \end{aligned}\right\}$ इस में $य=२४$ और $र=८$ ।

(२१) $$\left.\begin{array}{c}(२य+३)(३र+४)=६८+(य+२)(६र-१)\\ ५य-७र=१४\end{array}\right\}$$

इस में य = ७ और र = ३ ।

(२२) $$\left.\begin{array}{c}य^{२}+५य=४र^{२}-७र+८९\\ य+२र=१४\end{array}\right\}$$ इस में य = ८ और र = ३ ।

(२३) $$\left.\begin{array}{c}य^{३}-य^{२}+यर=र^{३}+३र^{२}+१०\\ य-र=१\end{array}\right\}$$ इस में य = ६ और र = ५ ।

(२४) $$\left.\begin{array}{c}\frac{४य+७}{१०}+\frac{५य+३र}{७य-१८}=१\frac{५}{६}+\frac{६य+१३}{१५}\\ \frac{३र+१}{७}-\frac{२य-र}{११य-८र}=\frac{६र-५}{१४}-\frac{१}{२}\end{array}\right\}$$

इस में य = ७ और र = ९ ।

(२५) $$\left.\begin{array}{c}\frac{५}{५य-२र}+\frac{७}{७य-३र}=\frac{२४}{१२य-५र}\\ \frac{३(२य+५)}{१४}+\frac{३य+५र+१}{७य-३र}=\frac{३य+४}{७}+१४\frac{१}{२}\end{array}\right\}$$

इस में य = १ और र = २ ।

अनेकवर्ण एकघातसमीकरण की समक्रिया

जिस में तीन आदि अव्यक्त हैं ।

९१ । जो तीन अव्यक्त हों तो उनका मान ठहराने के लिये तीन समीकरण चाहिये तब इस में उक्त विधि से दो समीकरणों से एक अव्यक्त को उड़ा के एक समीकरण उत्पन्न करो ऐसा हि इन दो समीकरणों में से एक और एक जो शेष बचा है इन दो समीकरणों से उसी अव्यक्त को उड़ा के एक दूसरा समीकरण उत्पन्न करो इस प्रकार से दो समीकरण उत्पन्न होंगे जिन में दो अव्यक्त होंगे तब उन का मान पूर्वोक्त विधि से निकालो फिर उत्थापन से तीसरे अव्यक्त का भी मान जान लेओ ।

अथवा तीन समीकरणों में कोइ दो समीकरणों से जो हो सके तो दो अव्यक्तों की उन्मिति ऐसी निकालो कि जिनमें अवशिष्ट एक हि अव्यक्त रहे । तब उन उन्मितिओं का अवशिष्ट समीकरण में उत्थापन करने से एक समीकरण ऐसा उत्पन्न होगा कि जिस में एकही अव्यक्त होगा तब समक्रिया से उस अव्यक्त का मान जान के उत्थापन से और दो अव्यक्तों के भी मान जान लेओ ।

जो चार अव्यक्त हों तो उन के मान चार अव्यक्तों से ज्ञात होंगे । उस का प्रकार यह है । निर्दिष्ट चार समीकरणों से पूर्वोक्त रीति करके तीन समीकरण उत्पन्न करो ऐसे कि जिन में तीन ही अव्यक्त होवें । तब उन तीन अव्यक्तों के मान ऊपर के विधि से ज्ञात होंगे फिर उत्थापन से चौथे का भी मान ज्ञात होगा ।

इसी भांति जिन पांच आदि समीकरणों में उतनेहि अव्यक्त होंगे उन की भी समक्रिया जानो ।

उदा० (१) $य + र + ल = १३$, $२य - ३र + ४ल = ०$ और $३य + ४र - ५ल = २९$ इस में य, र और ल इन के मान क्या हैं?

यहां (१) से $य = १३ - र - ल$, (२) से $य = \frac{३र - ४ल}{२}$

$$\therefore \quad १३ - र - ल = \frac{३र - ४ल}{२}$$

$$\therefore \quad २६ - २र - २ल = ३र - ४ल, \text{ वा, } ५र - २ल = २६ ।$$

अथवा, (१) से $य = १३ - र - ल$ इस उन्मिति का (२) में उत्थापन करने से, $२(१३ - र - ल) - ३र + ४ल = ०$

$$\therefore \quad २६ - २र - २ल - ३र + ४ल = ०, \text{ वा, } ५र - २ल = २६ ।$$

जो ऊपर उत्पन्न हुआ था सोहि समीकरण उत्पन्न हुआ ।

अथवा तीसरी रीति से, (१) को २ से गुणदेने से

$$२य + २र + २ल = २६$$

(२) $$२य - ३र + ४ल = ०$$

∴ अन्तर से, ५र − २ल = २६, यह वही समीकरण है जो पहिले दो वार उत्पन्न हुआ है ।

इसी भांति (२) और (३) इन से य को उड़ा के

यह समीकरण उत्पन्न होता है, $१७र - २२ल = ५८$
और ऊपर का उत्पन्न समीकरण $५र - २ल = २६$

इन दोनों से उक्त विधि कर के समक्रिया से,

र = ६ और ल = २ फिर उत्थापन से य = ५

अथवा

(१) से $$य = १३ - र - ल \quad (३)$$

(३) का (२) में उत्थापन कर के सवर्णित करने से

$$५र - २ल = २६ \quad ∴ \quad र = \frac{२ल + २६}{५} \quad (४)$$

(४) का (३) में उत्थापन करने से $य = १३ - \frac{२ल + २६}{५} - ल$

$$= \frac{६५ - २ल - २६ - ५ल}{५} = \frac{३९ - ७ल}{५} \quad (५)$$

∴ (४) और (५) इन उन्मितिओं से (३) में उत्थापन करने से

$$३\left(\frac{३९ - ७ल}{५}\right) + ४\left(\frac{२ल + २६}{५}\right) - ५ल = २$$

वा, $११७ - २१ल + ८ल + १०४ - २५ल = १४५$

∴ $३८ल = ७६$ और $ल = २$

फिर $य = \frac{३९ - ७ल}{५} = \frac{३९ - १४}{५} = \frac{२५}{५} = ५$,

और $र = \frac{२ल + २६}{५} = \frac{४ + २६}{५} = \frac{३०}{५} = ६$ ।

इस भांति इस उदाहरण में य = ५, र = ६ और ल = २ ।

उदा॰ (२) य + २ र − ३ ल = १०, ४ य + $\frac{१}{३}$ र = २९ और ७ र − ५ ल = १६ इस में य, र और ल इन का अलग२ मान क्या है?

यहां (३) रे से र = $\frac{५ ल + १६}{७}$, और (२) रे से य = $\frac{८७ − र}{१२}$

तब र के स्थान में उस की उन्मिति को रखने से = $\frac{८७ − \frac{५ ल + १६}{७}}{१२}$

$$= \frac{६०९ − ५ ल − १६}{८४} = \frac{५९३ − ५ ल}{८४}$$

अब य और र इन की उन्मितिओं का (१) में उत्थापन करने से

$$\frac{५९३ − ५ ल}{८४} + २\left(\frac{५ ल + १६}{७}\right) − ३ ल = १०$$

छेदगम से, ५९३ − ५ ल + १२० ल + ३८४ − २५२ ल = ८४०

पक्षान्तरनयन से, १३७ ल = १३७ ∴ ल = १

उत्थापन से य = ७ और = ३

इस प्रकार से इस में य = ७, र = ३ और ल = १ ।

उदा॰ (३) य + र = १७, य + ल = १२ और र + ल = ९ इस में य, र और ल इन के मान क्या हैं?

(१) से य = १७ − र, (२) से य = १२ − ल,

∴ १७ − र = १२ − ल और ल = र − ५,

ल की उन्मिति का (३) रे में उत्थापन करने से र + र − ५ = ९,

∴ २ र = १४ और र = ७ तब उत्थापन से य = १० और ल = २ ।

अथवा इस भांति के उदाहरण में पहिले तीनों समीकरणों का योग कर के उस में २ का अपवर्त करो तब उस में एक एक समीकरण घटादेने से तीनों अव्यक्तों के मान तुरंत ज्ञात होंगे ।

जैसा । यहां (१), (२), और (३) इन का योग करने से.

$$२य + २र + २ल = ३८$$

२ का भाग देने से, $य + र + ल = १९$

इस को तीन स्थानों में रख के क्रम से तीनों समीकरणों को घटा देने से,

$$\begin{array}{r} य + र + ल = १९, \\ य + र \qquad = १७, \\ \hline ल = २ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} य + र + ल = १९, \\ य \qquad + ल = १२, \\ \hline र = ७ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} य + र + ल = १९ \\ र + ल = ९ \\ \hline य = १० \end{array}$$

उदा॰ (४) $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{१}{१०}$, $\frac{१}{य} + \frac{१}{ल} = \frac{१}{१५}$ और $\frac{१}{र} + \frac{१}{ल} = \frac{१}{१८}$ इस में य, र और ल इन का मान क्या है?

यहां तीनों समीकरणों का योग करने से, $\frac{२}{य} + \frac{२}{र} + \frac{२}{ल} = \frac{२}{९}$

वा, $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} + \frac{१}{ल} = \frac{१}{९}$ इस में प्रत्येक समीकरण को

घटादेने से, $\frac{१}{ल} = \frac{१}{९} - \frac{१}{१०} = \frac{१० - ९}{९०} = \frac{१}{९०} \quad \therefore ल = ९०$

$$\frac{१}{र} = \frac{१}{९} - \frac{१}{१५} = \frac{५ - ३}{४५} = \frac{२}{४५} \quad \therefore र = \frac{४५}{२} = २२\frac{१}{२},$$

और $\frac{१}{य} = \frac{१}{९} - \frac{१}{१८} = \frac{२ - १}{१८} = \frac{१}{१८} \quad \therefore य = १८$ ।

उदा॰ (५) $\frac{यर}{य+र} = \frac{१}{२}$, $\frac{यल}{य+ल} = \frac{१}{३}$ और $\frac{रल}{र+व} = \frac{१}{४}$, इस में य, र और ल इन का मान क्या है?

(१) से $\frac{य+र}{यर} = २$, वा, $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = २$

(२) से $\frac{१}{य} + \frac{१}{ल} = ३$

(३) से $\frac{१}{र} + \frac{१}{ल} = ४$

तब चौथे उदाहरण के ऐसी सम क्रिया करने से

$य = २, र = \frac{२}{३}$ और $ल = \frac{२}{५}$ ।

अभ्यास के लिये और उदाहरण ।

(१) $२य + ३र + ४ल = २५, ३य + ४र + ५ल = ३४$ और $४य + ५र + ७ल = ४५$, इस में $य = ४, र = ३$ और $ल = २$

(२) $य + २र - ४ल = ७, २य + र + ९ल = ५०$ और $३य - ५र + ल = ५$, इस में $य = ९, र = ५$ और $ल = ३$ ।

(३) $य + \frac{१}{२}र + \frac{१}{३}ल = २००, य + \frac{१}{४}र + \frac{१}{५}ल = १५९$ और $य + \frac{१}{६}र + \frac{१}{७}ल = १४४$, इस में $य = १११, र = १०८$ और $ल = १०५$ ।

(४) $य + र + ल = २०, ३य + र = २३$ और $५र - २ल = २६$
इस में $य = ५, र = ८$ और $ल = ७$ ।

(५) $य + र = ८, य + ल = १०$ और $र + ल = १२$
इस में $य = ३, र = ५$ और $ल = ७$ ।

(६) $\frac{१}{२}य + \frac{१}{३}र = ६, \frac{१}{२}य + \frac{१}{४}ल = ५$ और $\frac{१}{३}र + \frac{१}{४}ल = ३$
इस में $य = ८, र = ६$ और $ल = ४$ ।

(७) $\frac{१}{य} + \frac{२}{र} + \frac{३}{ल} = \frac{५}{३}, \frac{२}{य} + \frac{३}{र} - \frac{४}{ल} = \frac{४}{३}$ और $\frac{३}{य} - \frac{४}{र} + \frac{५}{ल} = १$, इस में $य = २, र = ३$ और $ल = ६$ ।

(८) $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{१}{३६}, \frac{१}{य} + \frac{१}{ल} = \frac{१}{४५}$ और $\frac{१}{र} + \frac{१}{ल} = \frac{१}{६०}$
इस में $य = ६०, र = ९०$ और $ल = १८०$ ।

(९) $\frac{यर}{य + र} = १५, \frac{यल}{य + ल} = २४$ और $\frac{रल}{र + ल} = ४०$
इस में $य = २४, र = ४०$ और $ल = \infty$ ।

(१०) $य - र + ल = १$, $(अ + क)\,य - (अ + ग)\,र + (क + ग)\,ल = २$ और $अकय - अगर + कगल = ३$, इस में

$$य = \frac{ग^२ - २ग + ३}{(अ - ग)(क - ग)},\; र = \frac{क^२ - २क + ३}{(अ - क)(क - ग)} \text{ और } ल = \frac{अ^२ - २अ + ३}{(अ - क)(अ - ग)} ।$$

(११) $य - अर + अ^२ल = अ^३$, $य - कर + क^२ल = क^३$ और $य - गर + ग^२ल = ग^३$, इस में $य = अकग$, $र = अक + अग + कग$ और $ल = अ + क + ग$ ।

(१२) $\frac{यर}{य + र} = \frac{१}{अ}$, $\frac{यल}{य + ल} = \frac{१}{क}$ और $\frac{रल}{र + ल} = \frac{१}{ग}$, इस में

$$य = \frac{२}{अ + क - ग},\; र = \frac{२}{अ + ग - क} \text{ और } ल = \frac{२}{क + ग - अ} ।$$

(१३) $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{१}{अ}$, $\frac{१}{य} + \frac{१}{ल} = \frac{१}{क}$ और $\frac{१}{र} + \frac{१}{ल} = \frac{१}{ग}$,

इस में $य = \frac{२\,अकग}{अग + कग - अक}$, $र = \frac{२\,अकग}{अक + कग - अग}$, और

$$ल = \frac{२\,अकग}{अक + अग - कग} ।$$

(१४) $य + र + ल = ९$, $य + र + व = ६$, $य + ल + व =$ और $र + ल + व = ८$, इस में $य = २$, $र = ३$, $ल = ४$ और $व = १$ ।

बीजगणितसंवन्धि प्रश्न जिन से एकघात समीकरण उत्पन्न होते हैं ।

९२ । जिस प्रश्न का उत्तर जानना हो उस का सब अर्थ पहिले अच्छी भांति मन में ले आओ और तब ऐसा सोचो कि इस में जो अव्यक्त अर्थात् अज्ञात संख्या है वह जो ज्ञात होवे तो किस प्रकार से उस संख्या की प्रतीति करेंगे? अर्थात् वह संख्या उस अव्यक्त राशि का मान ठीक है वा नहीं यह किस प्रकार से जानेंगे? तब जिस प्रश्न का प्रतीति देखने का प्रकार अच्छी भांति मन में आवेगा उस प्रश्न का उत्तर बीजगणित से ज्ञात होगा । सो इस प्रकार से ।

प्रश्न में जो अव्यक्त राशि होगा उस का मान य मानो और उसी को अव्यक्त राशि की ज्ञात संख्या समझ के उस की प्रतीति करने के प्रकार से उस संख्या में प्रश्न की बोली के अनुसार सब गणित करो तो अन्त में ऐसे दो पक्ष ठहरेंगे कि जिन में परस्पर कोइ नियत संबन्ध हो। जो उन में परस्पर समत्व संबन्ध हो अर्थात् उन दोनों पक्षों के मान परस्पर समान हों तो उन को = इस चिह्न की दोनों ओर में लिख देने से एक समीकरण उत्पन्न होगा। और जो उन दो पक्षों में कोइ और संबन्ध हो तो उन में किसी एक पक्ष में ऐसा संस्कार करो कि जिस से दोनों पक्षों के मान तुल्य होवें। तब उन से उक्त प्रकार से एक समीकरण होगा। उस की समक्रिया से य का मान ज्ञात होगा वही प्रश्न के अव्यक्त राशि का मान होगा उस से प्रश्न का उत्तर सब स्पष्ट होगा।

जो प्रश्न में अनेक अव्यक्त राशि हों तो उन के मान अलग २ य,र,ल इत्यादि मान के उन से उक्त प्रकार के अनुसार अलग २ दो २ समान पक्ष सिद्ध करो तो जितने अव्यक्त राशि होंगे उतने समीकरण उत्पन्न होंगे। तब अनेकवर्ण समीकरण की समक्रिया से य,र,ल इत्यादि अव्यक्तों के मान ज्ञात होंगे उन से प्रश्न का उत्तर स्पष्ट होगा।

अथवा जब प्रश्न में अनेक अव्यक्त राशि हैं तब उन में जो एक अव्यक्त का मान ज्ञात होने से और सब अव्यक्तों के मान ज्ञात होते हों तो कभी २ यों करते हैं कि उसी अव्यक्त का मान य मान के उस से और अव्यक्तों के मान ठहरा के दो पक्ष सिद्ध करते हैं उन से एक हि समीकरण उत्पन्न होता है। तब समक्रिया से य का मान जान के उत्थापन से और अव्यक्तों के मान जान लेते हैं। यह सब क्रिया आगे जो उदाहरण लिखेंगे उन से स्पष्ट होगी।

प्रश्न १। जिस संख्या को दूनी कर के उस में उसी संख्या का आधा जोड़ दोओ तो योग १५ होता है वह संख्या क्या है?

यहां य = अव्यक्त संख्या, तव प्रश्न की बोली से २ य + $\frac{१}{२}$ य, और १५ ये दोनों पक्ष परस्पर तुल्य हैं ।

∴ २ य + $\frac{१}{२}$ य = १५ यह समीकरण होता है । तब छेदगम से, ४ य + य = ३०, वा, ५ य = ३०,

∴ य = ६ यह संख्या । यही उत्तर है ।

क्योंकि २ × ६ + $\frac{६}{२}$ = १२ + ३ = १५ ।

प्रश्न २ । जिस संख्या को तिगुनी कर के उस में १७ घटा देओ तो शेष में उस संख्या से ५ अधिक रहता है वह संख्या क्या है?

यहां य = अव्यक्त संख्या,

तो प्रश्न की बोली के अनुसार ३ य − १७ और य + ५ ये दो पक्ष सिद्ध होते हैं । और ये दोनो परस्पर समान हैं ।

∴ ३ य − १७ = य + ५,

तव पक्षान्तरनयन से २ य = २२ ∴ य = ११

अर्थात् वह संख्या ११ है । यह उत्तर ।

प्रश्न ३ । २१ इस संख्या के ऐसे दो भाग करो कि पहिले का चतुर्थांश और दूसरे का पञ्चमांश मिलके ५ होवें तो वे भाग कौन से हैं?

यहां य = पहिला भाग, और र = दूसरा भाग तव प्रश्न की बोली से, य + र = २१ और $\frac{१}{४}$ य + $\frac{१}{५}$ र = ५

(१) से य = २१ − र इस उन्मिति का (२) में उत्थापन करने से, $\frac{१}{४}$ (२१ − र) + $\frac{१}{५}$ र = ५,

छेदगम से, १०५ − ५ र + ४ र = १००

∴ र = ५, यह दूसरा भाग है और य = २१ − र = २१ − ५ = १६ यह पहिला भाग है ।

अथवा यहां एक भाग को जानने से दूसरा भाग तुरंत जान सकते हैं इस लिये यहां जो य = पहिला भाग मानो तो स्पष्ट है कि २१ − य = दूसरा भाग होगा ∴ प्रश्न की बोली से, $\frac{य}{४} + \frac{२१ - य}{५} = ५$,

छेदगम से, ५ य + ८४ − ४ य = १००

∴ य = १६ यह पहिला भाग है,

और दूसरा भाग = २१ − य = २१ − १६ = ५ ।

इस प्रकार से यहां २१ इस संख्या के १६ और ५ ये दो भाग हैं । यह उत्तर ।

प्रश्न ४ । दो नगरों में १४० कोसों का बीच था उन दो नगरों से अ और क ये दो मनुष्य परस्पर मिलने के लिये एक हि काल में चले; उस में अ मनुष्य प्रति दिन ११ कोस चलता था और क ९ कोस चलता था । तब नगर से चलने के पीछे कितने दिन पर उन दोनों की मार्ग में भेट हुई?

यहां मानो कि चलने के पीछे य दिन पर उन की मार्ग में भेट हुई, तब ११ य = अ के चलने के को कोस और ९ य = क के चलने के कोस ।

∴ ११ य + ९ य = १४०,

वा २० य = १४० और य = ७ ।

अपने २ गांव से चलने के पीछे ७ दिन पर अ और क इन की परस्पर भेट हुई । यह उत्तर ।

प्रश्न ५ । अ, क, ग इन तीन मनुष्यों को साझे के व्यापार में एकट्ठे ५४० रुपये मिले, उस में अ, से क, के १५३ रुपये अधिक थे और क, से ग के १२६ रुपये न्यून थे तो उस में हर एक के कितने २ रुपये थे?

यहां य = अ, के रुपये, र = क, के रुपये और ल = ग, के रुपये । तो प्रश्न की बोली से, य + र + ल = ५४०, य = र − १५३ और र = ल + १२६ ये तीन समीकरण होते हैं । तब

(३) रे में र की उन्मिति से (२) रे में उत्थापन करने से

$$य = ल + १२६ - १५३ = ल - २७,$$

अब य और र इन के उन्मितिओं से (१) में उत्थापन करने से

$$ल - २७ + ल + १२६ + ल = ५४०,$$

$\therefore$ ३ ल = ४४१ और ल = १४७ यह ग, का द्रव्य है ।

तब उत्थापन से, य = १२० यह अ, का धन, और र = २७३ यह क, का धन है ।

अथवा

मानो कि य = अ, का धन तो य + १५३ = क, का धन

और य + १५३ - १२६ = य + २७ = ग का धन,

$\therefore$ य + य + १५३ + य + २७ = ५४०,

वा, ३ य = ३६० $\therefore$ य = १२० यह अ, का धन है । तब उत्थापन से, य + १५३ = १२० + १५३ = २७३ यह क, का धन

और य + २७ = १४७ यह ग, का धन है । यह उत्तर ।

प्रश्न ६ । जिस भिन्न संख्या के अंश में २ जोड़ देने से उस का मान $\frac{१}{२}$ और छेद में ३ मिला देने से उस का मान $\frac{१}{३}$ होता है वह भिन्न संख्या क्या है?

यहां मानो कि य = अव्यक्त भिन्न संख्या का अंश और र = छेद है तो $\frac{य}{र}$ = अव्यक्त भिन्न संख्या होगी ।

$\therefore$ प्रश्न की बोलों से, $\frac{य+२}{र} = \frac{१}{२}$ और $\frac{य}{र+३} = \frac{१}{३}$ ।

(१) से, र = २ य + ४, और (२) से र = ३ य - ३

$\therefore$ २य + ४ = ३ य - ३, $\therefore$ य = ७ यह अंश है और उत्थापन से र = २ य + ४ = १८ यह छेद है $\therefore$ $\frac{७}{१८}$ यह अभीष्ट भिन्न संख्या है । यह उत्तर ।

प्रश्न ७। दो अङ्कों की एक संख्या है उस में जो उन दो अङ्कों के योग का भाग देओ तो भजन फल ७ आता है और जो उस संख्या में १८ घटा देओ तो शेष में उन्हीं अङ्कों की स्थिति पलट के रहती है वह संख्या कौन है ?

मानो य = उस संख्या का दशस्थानीय अङ्क

र = एकस्थानीय अङ्क

तो १० य + र = संख्या

$\therefore$ $\frac{१० य + र}{य + र}$ = ७ और सवर्णन से, य = २ र,

और १० य + र − १८ = १० र + य

$\therefore$ ९ य = ९ र + १८, वा, य = र + २

$\therefore$ र = २ और य = ४ $\therefore$ ४२ यह संख्या है। यह उत्तर।

प्रश्न ८। अ और क दो मित्र थे उन में अ, ने क, से कहा कि जो तुम हम को १६ रुपये देओ तो हमारे पास तुम से तिगुने रुपये हो जाएंगे, तब क, ने अ, से कहा कि जो तुम हम को १७ रुपये देओ तो हमारे पास तुमसे चौगुने रुपये होंगे। तब अ और क इन के पास कितने २ रुपये थे सो कहो।

यहां य = अ, के रुपये, और र = क, के रुपये

तब प्रश्न की बोली से, य + १६ = ३ (र − १६)

और ४ (य − १७) = र + १७

$\therefore$ समक्रिया से, य = २९ और र = ३१।

$\therefore$ अ, के पास २९ रुपये थे और क, के पास ३१ थे यह उत्तर।

इस में १६ और १७ ये क्रम से अ और क इन के दान कहलावें और ३ और ४ ये गुण कहलावें।

अब जो अ, का दान प और गुण फ और क, का दान ब और गुण भ हो तो प्रश्न की बोली से इस भांति के दो समीकरण उत्पन्न

होंगे, $य + प = फ (र - प)$ और $भ (य - ब) = र + ब$, बत समक्रिया से, $य = ब + \frac{(प + ब)(फ + १)}{फभ - १}$ और $र = प + \frac{(प + ब)(भ + १)}{फभ - १}$।

ये य और र के मान प, फ, ब और भ इन पदों में लब्ध हुए हैं। इस लिये इस भांति के प्रश्न में प, फ, ब और भ इन के संख्यात्मक मानों से य और र के मानों में उत्थापन करने से य और र के संख्यात्मक मान तुरंत ज्ञात होंगे।

जैसा ऊपर के प्रश्न में $प = १६, फ = ३, ब = १७$ और $भ = ४$

$$\therefore\ य = ब + \frac{(प + ब)(फ + १)}{फभ - १} = १७ + \frac{३३ \times ४}{११} = १७ + १२ = २९,$$

$$और,\ र = प + \frac{(प + ब)(भ + १)}{फभ - १} = १६ + \frac{३३ \times ५}{११} = १६ + १५ = ३१।$$

यों य, और र के अक्षरात्मक मानों से इस प्रकार के प्रश्न का उत्तर लाघव से जानने के लिये मैंने एक सूत्र बनाया है।

दानैक्ये सैकेन स्वस्वगुणेनाहते निरेकेण।
गुणघातेन हृते स्वे स्यातामन्योन्यदानसंयुक्ते।

इस का अर्थ। दानों का योग दो स्थान में रखो उस को क्रम से एक से अधिक अपने २ गुण से गुण देओ और उन में गुणों के गुणनफल में एक घटा के शेष का भाग देओ फिर लब्धिओं में परस्पर के दान जोड़ देओ। वे योग क्रम से उन पुरुषों के धन होंगे।

प्रश्न ९। जो काम अ मनुष्य प दिन में करता है वही काम क मनुष्य फ दिन में करता है तो अ और क ये दोनों मिल के साथ वही काम कितने दिन में करेंगे कहो?

यहां मानो कि अ और क मिल के साथ य दिन में वह काम करेंगे और १ यह उस एक काम का द्योतक है, तो

$\frac{य}{प}$ = य दिन में अ, के काम का विभाग, और

$\frac{य}{फ}$ = य दिन में क, के काम का विभाग

$\therefore\ \frac{य}{प} + \frac{य}{फ} = १$ ∴ समक्रिया से, $य = \frac{पफ}{प + फ}$

प्रश्न १० । जो काम अ और क मिल के २१ दिन में करते हैं वही काम अ और ग मिल के ३० दिन में करते हैं और क और ग मिल के ७० दिन में करते हैं तो हर एक मनुष्य कितने दिन में वह काम करेगा?

यहां मानो कि वह काम अ मनुष्य य दिन में करता है और क मनुष्य र दिन में और ग मनुष्य ल दिन में करता है तो ९ वे प्रश्न के अव्यक्त के मान के आश्रय से और इस प्रश्न की बोली से ये तीन समीकरण उत्पन्न होंगे

$$\frac{यर}{य+र}=२१,\ \frac{यल}{य+ल}=३०\ \text{और}\ \frac{रल}{र+ल}=७०$$

तब समक्रिया से, य = ३०, र = ७० और ल = $\frac{१}{०}$ = ∞ ।

∴ वह काम अ मनुष्य ३० दिन में, क मनुष्य ७० दिन में करेगा और ग मनुष्य अनन्त दिन में अर्थात् वह कुछ काम नहीं करता था।

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) वह संख्या क्या है कि जिस को दूनी कर के उस में ३ मिला देओ तो योग उस संख्या के तृतीयांश से २८ अधिक होता है?

उत्तर, १५ ।

(२) वह संख्या कौन सी है कि जिस का $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{५}$ इन का योग उस के $\frac{१}{२}$ से १७ अधिक होता है?

उत्तर, ६० ।

(३) १७ इस संख्या के वे दो भाग कौन से हैं कि जिन में एक दूसरे से ५ अधिक होवे?

उत्तर, ११ और ६ ।

(४) एक संख्या ऐसी है कि जो उस में ७ घटा के शेष को ७ से गुण देओ और उसी संख्या में ३ घटा के शेष को ३ से गुण देओ तो वे दोनों गुणनफल परस्पर तुल्य होते हैं, वह संख्या क्या है?

उत्तर. १० ।

(५) जिन दो संख्याओं का अन्तर दो है उन दोनों में जो १ जोड़ देओ तो पहिले योग से दूसरा योग दूना होता है। वे दो संख्या क्या हैं?

उत्तर, १ और ३ ।

(६) अ और क ये दो मनुष्य जुआ खेलने बैठे। उस समय अ, के पास ७६३ रुपये और क, के पास ५९६ रुपये थे। फिर उन की परस्पर बहुत बेर हार जीत हुई। अन्त को जब वहां से उठे तब क, के पास अ, से दूने रुपये हुए। तो अ, से क कितने रुपये जीता?

उत्तर, ३१० ।

(७) दो लड़कों में बड़ा लड़का छोटे से वय में दो बरस बड़ा था परंतु ५ बरस पहिले वय में दूना था। तब उन दो लड़कों का वय कितना २ था?

उत्तर, बड़े लड़के का वय ९ बरस छोटे का वय ७ बरस।

(८) किसी मनुष्यने कुछ कबूतर और तोते मिल के २० पक्षी ११ रुपये पर मोल लिये उस में हर एक कबूतर का मोल ९ आने और हर एक तोते का मोल ७ आने था तब उन पक्षिओं में कितने कबूतर और कितने तोते थे?

उत्तर, १८ कबूतर और २ तोते।

(९) एक सरोवर के मध्य में एक खम्भा खड़ा था। उस का $\frac{1}{5}$ भूमि में गड़ा था, $\frac{1}{6}$ कीच में था और $\frac{1}{4}$ जल में था और जल के ऊपर ११ $\frac{1}{2}$ अर्थात् साढ़े ग्यारह हाथ दिखाई देता था। तो वह सब खम्भा कितने हाथ लम्बा था?

उत्तर, ३० हाथ।

(१०) एक माता का वय उसकी लड़की के वय से चौगुना था

परन्तु ५ बरस पहिले नौगुना था । तो माता का और लड़की का वय कितना २ था?

उत्तर, माता का वय ३२ बरस और लड़की का ८ बरस ।

(११) एक मनुष्य के पास दो घोड़े और सौ रुपयों का एक जीन था जब वह मनुष्य पहिले घोड़े पर जीन रखता था तब उस जीनसमेत घोड़े का मोल दूसरे केवल घोड़े के मोल से दूना होता था और जब वह जीन दूसरे घोड़े पर रखता था तब उस जीन समेत घोड़े का मोल पहिले केवल घोड़े के मोल से तिगुना होता था तो हर एक घोड़े का मोल क्या था सो कहो?

उत्तर, पहिले घोड़े का मोल ६० रुपये और दूसरे का ८० रुपये ।

(१२) एक मनुष्य को अ और क दो पुत्र थे । उस ने अपने मरण समय में उस के पास जितना धन था उतना दोनों पुत्रों को समान बांट दिया । पीछे अ ने एक बरस में ५४० रुपये और मिला के अपने विभाग में डाल दिये और क ने अपने विभाग हि में से एक बरस में ३२५ रुपये उड़ा दिये । तब क के पास जितना धन बचा उस से अ के पास दूना धन हो गया । तो उस मनुष्य के मरण समय में उस के पास कितना धन था?

उत्तर, २३८० रुपये ।

(१३) एक धनिक ने पुरुष को ८ पैसे स्त्री को ५ और लड़के को १ इस क्रम से कितने एक दरिद्रों को १०० पैसे बांट दिये । उन में पुरुषों से आधी स्त्री थीं और दूने लड़के थे । तब उस में पुरुष, स्त्री और लड़के कितने २ थे?

उत्तर, ८ पुरुष, ४ स्त्री और १६ लड़के ।

(१४) एक लड़के ने अपने बाप से पूछा कि बाबू जी मेरा वय क्या है तब बाप ने कहा कि बेटा अभि तेरा वय मेरी वय की तिहाई से

३ बरस अधिक है परन्तु दो बरस पहिले तेरा वय मेरी वय की चौथाई से चार बरस अधिक था । तब उस समय बाप का वय क्या था और लड़के का क्या था?

उत्तर, बाप का वय ३० बरस और लड़के का १३ बरस ।

(१५) एक मनुष्य काशी से प्रयाग की ओर चला वह एक घड़ी में एक कोस चलता था फिर ४० पल पीछे उस का बड़ा भाई अपने छोटे भाई को फेर लाने के लिये उसी मार्ग पर चला वह एक घड़ी में १ $\frac{१}{४}$ कोस चलता था । तब वह बड़ा भाई अपने छोटे भाई को काशी से कितनी दूर पर मिला?

उत्तर, ३ $\frac{१}{३}$ कोस पर ।

(१६) एक मनुष्य ने ८ लड़कों को एक रुपया के ६४ पैसे इस क्रम से बांट दिये कि पहिले को जितने पैसे दिये उससे दूसरे को एक अधिक दिया उस से तीसरे को एक अधिक इत्या० तो हर एक लड़के को कितने २ पैसे दिये सो बताओ ।

उत्तर, पहिले को ४ $\frac{१}{२}$, दूसरे को ५ $\frac{१}{२}$ इत्यादि

(१७) घड़ी में तीन बजने के उपरान्त कितने मिनिट पर मिनिट की सूई घण्टे की सूई पर ठीक लम्बरूप होती है?

उत्तर, तीन बज के ३२ $\frac{८}{११}$ मिनिट पर ।

(१८) जब घड़ी में चार बजने के उपरान्त दोनो सूई भिन्न दिशा में एक रेखा में होती है तब ठीक समय क्या होगा?

उत्तर, ४ घण्टे और ५४ $\frac{६}{११}$ मिनिट ।

(१९) जिन संख्याओं का योग १७ और जिन के वर्गों का अन्तर ५१ है वे दो संख्या क्या हैं?

उत्तर, १० और ७ ।

(२०) एक उपवन में आम, इमली और कैथ के पेड़ मिल के १००० थे उस में आम के पेड़ों से इमली के पेड़ ७५ न्यून थे और इमली के पेड़ों से कैथ के पेड़ २०० न्यून थे। तो कहो उस में आम, इमली और कैथ के कितने २ पेड़ थे?

उत्तर, आम के पेड़ ४५०, इमली के ३७५, और कैथ के १७५।

(२१) अ, के पास ३ रत्न थे उस को १०० रुपये ऋण था और क, के पास २ रत्न थे उस को १ रुपया ऋण था। उन दोनों ने एक मोल से सब रत्न बेंच के अपना २ ऋण दे डाला। तब दोनों के पास समान हि द्रव्य बचा तो हर एक रत्न का मोल क्या था?

उत्तर, ९९ रुपये।

(२२) एक गांव से अ, मनुष्य प्रवास करने निकला वह एक घण्टे में ३ $\frac{1}{2}$ कोस चलता था फिर उस के ५ घण्टे पीछे उसी गांव से क, मनुष्य उसी मार्ग में चला वह हर घण्टे में ४ चार कोस चलता था तब उस गांव से कितने कोस पर उनकी भेंट भई सो कहो?

उत्तर, १४० कोस पर।

(२३) जिन दो नगरों का अन्तर १०० कोस है उन दो नगरों से अ और क ये दो मनुष्य परस्पर मिलने के लिये एक काल में चले सो १० घण्टे में मिले तब जाना गया कि अ, से क, हर घण्टे में २ दो कोस अधिक चला। तब अ और क हर घण्टे में कितना २ चलते थे?

उत्तर, अ, ४ कोस और क, ६ कोस।

(२३) अ ने क से पूछा कि तुम घड़ी के पास बैठे हो कहो क्या बजा है क ने कहा दस बज गया है। तब अ ने कहा कि ठीक समय कहो तब क ने कहा कि घण्टा में ऊपर जो १२ का चिह्न है उस से पीछे जितने अन्तर पर घण्टे की सूई है उतने हि अन्तर पर उस चिह्न के आगे मि-

निट की सूई है इस से ठीक समय जान लेओ । तो बताओ तब ठीक समय क्या था?

उत्तर, दस से ऊपर ९ $\frac{३}{१३}$ मिनिट ।

(२५) घड़ी में जब ५ बजने के पीछे दोनो सूई एक में मिल जाती हैं तब ठीक समय क्या होगा?

उत्तर, ५ घण्टे २७ $\frac{३}{११}$ मिनिट ।

(२६) किसी मनुष्य ने पैसे के ३ इस भाव से कुछ सीताफल मोल लेके उतने हि सीताफल पैसे के ४ इस भाव से और मोल लिये फिर सब वे फल २ पैसे के ७ इस भाव से बेंच डाले तब एक पैसा घाटा हुआ तो उस ने कितने २ सीताफल मोल लिये?

उत्तर, ८४ ।

(२७) एक महाजन नें २५ दिन के लिये एक नौकर रखा उस से यह ठहराया था कि जिस दिन वह अच्छा काम करे उस दिन ५ आने पावे और जिस दिन वह अच्छा काम न करे वा खेले उस दिन उस से उलटा दो आने दण्ड लिया जावे । अन्त को जब २५ दिन पूरे हुए तब उस महाज़न ने उस को तीन रुपये दिये । तब कहो उस ने कितने दिन अच्छा काम किया?

उत्तर, १४ दिन ।

(२८) अ और क ये दो मनुष्य पशुओं का व्यापार करते थे उन में अ के पास ६ घोड़े, ९ खच्चर और ८ बैल थे और क के पास ५ घोड़े, १० खच्चर और १२ बैल थे । इन में एक बैल के मोल से एक खच्चर का मोल दूना था और एक घोड़े का मोल तिगुना था । उन दोनों मनुष्यों ने अपने २ सब पशु बेंच डाले तब उस में अ से क को ५७ रुपये अधिक मिले । तो उन तीन जात के पशुओं में हर एक पशु का मोल क्या था?

उत्तर, एक घोड़े का मोल ५७ रुपये, खच्चर का ३८ रुपये और बैल का १९ रुपये ।

(२९) एक स्त्री कुछ फल लेके हाट में बेचने गई । वहां उसने पैसे के सात २ फल बेंचे तब दो फल शेष बचे । फिर दूसरे दिन वह स्त्री उतने हि फल लेके बेचने गई । उस दिन उसने पैसे के नौ २ फल बेंचे तब एक फल बचा । यों उस को दो दिन के पैसे मिलके २५ मिले । तो वह दोनो दिन कितने २ फल लेके बेंचने गई सो कहो ।

उत्तर, १०० फल ।

(३०) एक भिन्न संख्या का मान $\frac{१}{२}$ है उसके अंश में जो एक घटा देओ तो उसका मान $\frac{१}{३}$ होगा तो वह भिन्न संख्या क्या है?

उत्तर, $\frac{३}{६}$ ।

(३१) एक मनुष्य ने किसी सराफ से १३ रुपये की कुछ अठन्नी और चवन्नी मिलके ३८ लिई । तब कहो उसमें कितनी अठन्नी और कितनी चवन्नी थीं?

उत्तर, १४ अठन्नी और २४ चवन्नी ।

(३२ एक माली अपने बगीचे में से एक खंचिया भर आम ले के हाट में बेंचने गया । वहां उस ने पैसे के सात २ आम बेंचे तब खंचिया में ५ आम शेष बचे । फिर उस ने दूसरे दिन भी उतने हि आम पैसे के छ २ बेंचे तो ४ शेष रहे । यों तीसरे दिन उतने हि आम पैसे के पांच २ बेंचे तो ३ आम शेष रहे और चौथे दिन उतने हि आम पैसे के चार २ बेंचे तो खंचिया में दो आम शेष बचे । यों चार दिन के बेंचने में उस माली को सब ३१५ पैसे मिले । तो वह माली नित्य कितने आम बेंचने के लिये ले जाता था?

उत्तर, ४१८ आम ।

(३३) एक मनुष्य के पास ३६५०० रुपये धन था और उसको पुत्र और कन्या मिलके १० अपत्य थे । उसने अपने अन्त समय में अपने हर एक पुत्र को ५००० रुपये और हर एक कन्या को ५०० रुपये यों सब धन बांट के मर गया । तब उसको कितने पुत्र और कितनी कन्या थीं ।

उत्तर, ७ पुत्र और ३ कन्या ।

(३४) एक तंबोली की दूकान में एक पैसे के १०० पान, एक पैसे की २५ सुपारी और एक हि पैसे की ५ लायची मोल मिलती थीं । एक मनुष्य ने एक पैसा उस तंबोली को देके कहा मुझ को इस में जितने पान उतनी हि सुपारी और उतनी हि लायची देओ । तब वह तंबोली इस बात को सुनतेहि कुछ चकित सा होगया । तो बताओ कि पान, सुपारी, और लायची इनकी समान संख्या क्या होगी?

उत्तर, ४ ।

(३५) वे पास की दो संख्या कौन हैं कि जिन के वर्गों का अन्तर ७७ होता है?

उत्तर, ३८ और ३९ ।

(३६) अ और क इन दो मनुष्यों को रुपयों की एक थैली मिली । उस में अ ने १० रुपये और शेष का चतुर्थांश लिया । तब जो उस थैली में शेष रहा उस में से क ने २० रुपये लिये और जो शेष बचा उस का चतुर्थांश लिया । तब थैली में ३० रुपये शेष रहे । तो पहिले उस थैली में कितने रुपये थे और अ और क ने कितने २ रुपये लिये?

उत्तर' थैली में ९० रुपये थे और हर एक ने ३० रुपये लिये ।

(३७) एक गंड़ेरिआ के पास कुछ भेड़ी थीं । एक चोर उन भेड़िओं में से एक भेड़ी और शेष भेड़िओं का तीसरा भाग इतनी भेड़ी ले गया । तब जो उस गंड़ेरिआ के पास भेड़ी बची उन में से इसी भांति और तीन बार ले गया । यों चार बार में उस चोर ने ६५ भेड़ी चुरा लिईं ।

तो उस गंड़ेरिये के पास पहिले कितनी भेड़ी थीं और अन्त में कितनी बच रही सो कहो ।

उत्तर, पहिले ७९ भेड़ी थीं और अन्त में १४ भेड़ी बची ।

(३८) एक बनिये ने रुपया के ३० सेर के भाव से २० रुपयें के चने और २५ के भाव से ६४ रुपयें के चने मोल लिये और २० के भाव से भी और कुछ चने मोल लिये और ये तीनों प्रकार के चने इकट्ठे कर के सब २३ सेर के भाव से बेंच डाले तो उस में उस को ५ रुपये लाभ हुआ । तो उस ने २० सेर के भाव के चने कितने रुपयें के मोल लिये सो कहो ?

उत्तर, ५१ रुपयें के ।

(३९) अ और क इन दो मनुष्यों के पास कुछ २ सत्तु मिल के ११ पाव था । वे दोनों एक कूंवे पर जाके खाने के लिये बैठे । वहां एक तीसरा ग मनुष्य आया । तब उस ११ पाव सत्तु के समान तीन भाग कर के तीनों ने एक२ भाग खा लिया । अन्त में ग ने अ और क इन दोनों को मिल के ११ पैसे दिये और चला गया । उस में से गिनती लगा के अ ने ७ पैसे लिये और क ने ४ लिये । तो पहिले अ और क के पास कितना २ सत्तु था ?

उत्तर, अ के पास ६ पाव और क के पास ५ पाव सत्तु था ।

(४०) एक मनुष्य किसी दिन प्रातः काल में अपनी घड़ी के ५ बजे घर से चल के अपने मित्र के यहां गया तब मित्र की घड़ी में साढ़े पांच बजा था । वहां वह ५ घंटे बैठ के जिस गति से प्रातः काल में चला था उसी गति से और उसी मार्ग से अपने घर चला आया तब उस की घर की घड़ी में साढ़े ग्यारह बजा था । अब जो उस मनुष्य की और उस के मित्र की घड़ी की गति एकरूप और समान हो तो

उन दोनों घड़िओं के काल में कितना अन्तर था और उस मनुष्य को मार्ग में जाने वा आने में कितना काल लगा सो कहो ?

उत्तर, दोनों घड़िओं के काल में १५ मिनिट का अन्तर था और मार्ग में जाने वा आने में ४५ मिनिट काल लगा ।

(४१) ३२० इस संख्या के ऐसे चार भाग करो कि जो पहिले में दो मिला देओ, दूसरे में ३ घटा देओ, तीसरे को ४ से गुण देओ और चौथे में ५ का भाग देओ तो चारो फल समान होवें ?

उत्तर, ४२, ४७, ११ और २२० ।

(४२) एक जुआरी कुछ रुपये लेके जुआ खेलने बैठा । वह पहिली बार अपने द्रव्य का $\frac{1}{4}$ और एक रुपया का $\frac{1}{4}$ जीता फिर दूसरी बार जो उस के पास द्रव्य हुआ था उस का $\frac{1}{3}$ और एक रुपया का $\frac{1}{3}$ जीता और तिसरी बार फिर उस के पास जितना द्रव्य हुआ था उस का $\frac{1}{2}$ और एक रुपया का $\frac{1}{2}$ जीता। तब उस के पास पहिले जितना द्रव्य था उस से तिगुना हुआ । तो कहो वह पहिले कितने रुपये ले के खेलने बैठा था ?

उत्तर, ३ रुपये ।

(४३) एक बाबू ने अपनी सेना वर्गाकार खड़ी किई तब १०० मनुष्य बच रहे । तब उस ने वर्ग के अनुसार हि एक २ पंक्ति में एक २ मनुष्य बढा दिया तब वर्ग का आकार पूरा होने में ४१ मनुष्य और चाहिये थे। तो कहो उस बाबू की सेना कितनी थी ?

उत्तर, ५००० मनुष्य ।

(४४) एक मनुष्य का बाप मर गया तब उस को जितना धन मिला उस में से उस नें १००० रुपये घर के काम के लिये अलग रख के बचा हुआ द्रव्य एक बरस में व्यापार से दूना किया तब उस में से १००० रुपये फिर घर के काम के लिये अलग रख के बचा हुआ द्रव्य दूसरे

बरस में भी व्यापार से दूना किया। यों उस ने पांच बरस तक व्यापार किया अन्त में उस के पास सब द्रव्य पहिले से सप्तगुण अर्थात् सात गुना हुआ। तब उस मनुष्य को बाप से कितना धन मिला सो कहो?

उत्तर, २४८० रुपये।

(४५) दो अङ्कों की ऐसी एक संख्या है कि उस के एक स्थान के अङ्क से दश स्थान का अङ्क दूना है और जो उस संख्या में २७ घटा देओ तो शेष संख्या में उन्हीं दो अङ्कों की स्थिति पलट के रहती है वह संख्या क्या है?

उत्तर, ६३।

(४६) एक बनिये ने एक रुपये के १६ सेर के भाव से कुछ चावल और कुछ चावल १३ सेर के भाव से मिल के ३० रुपये को मोल लिये। और वे दोनों प्रकार के चावल इकट्ठे कर के उस ने सब १४ सेर के भाव से बेंच डाले तब उस में उस को कुछ लाभ नहीं हुआ। पर कुछ घाटा भी नहीं हुआ। तो उस ने दोनों प्रकार के चावल कितने २ रुपये के मोल लिये सो कहो?

उत्तर, १६ सेर के भाव के १० रुपये के और १३ सेर के भाव के २० रुपये के।

(४७) गङ्गा जी में एक बड़ी नाव में नीचे ४१० सेर पानी आ गया था उस को अ और क ये दो मनुष्य एक २ पात्र ले के बाहर फेंकने लगे। उस में अ के पात्र से क के पात्र में दूना पानी समाता था। और अ मनुष्य ५ पल में ३ बार पानी बाहर फेंकता था और क मनुष्य ७ पल में २ बार फेंकता था। इस प्रकार से उन दोनों मनुष्यों ने एक घड़ी और १० पल में सब पानी बाहर फेंक दिया। तो हर एक मनुष्य के पात्र में कितना २ पानी समाता था?

उत्तर, अ के पात्र में ५ सेर पानी और क के पात्र में १० सेर।

(४८) १६९ इस संख्या के पांच विभाग ऐसे करो कि पहिले विभाग को ६ से गुण के फल में ५ जोड़ देओ, दूसरे को ५ से गुण के ४ जोड़ देओ, तीसरे को ४ से गुण के ३ जोड़ देओ, चौथे को ३ से गुण के २ जोड़ देओ और पांचवे को दो से गुण के १ जोड़ देओ तो सब योग परस्पर समान होवें। तो वे विभाग क्या हैं सो कहो?

उत्तर, १९, २३, २९, ३९ और ५९ ये क्रम से विभाग हैं।

(४९) एक बरस में सौ रुपयों को ५ रुपये व्याज के भाव से किसी मनुष्य ने कुछ ऋण लिया। साढे तीन बरस में उस का व्याज ऋण के छठवें अंश से १० रुपये अधिक हुआ। तो उस मनुष्य ने कितने रुपये ऋण लिया था सो कहो?

उत्तर, १२०० रुपये।

(५०) एक महाजन ने १ बरस में सौ रुपयों को ५ रुपये व्याज के भाव से किसी मनुष्य को कुछ रुपये ऋण दिया। उस मनुष्य ने चौथे बरस के अन्त में उस महाजन के सब रुपये व्याज समेत चुका दिये। परन्तु जो वह महाजन अन्त में सब व्याज चक्र वृद्धि से लेता तो उस को १५५ रुपये और १ आना इतना व्याज अधिक मिलता। तो उस मनुष्य ने उस महाजन से कितने रुपये ऋण लिया था सो कहो?

उत्तर, १०००० रुपये।

(५१) जिन दो संख्याओं में पहिली का $\frac{१}{३}$ और दूसरी का $\frac{१}{४}$ इन का योग १६ होता है और पहिली के $\frac{१}{५}$ में जो दूसरी का $\frac{१}{६}$ घटा देओ तो दो शेष रहता है वे संख्या क्या हैं?

उत्तर, ३० और २४।

(५२) अ ने क के पास जितने रुपये थे उतने और उस को दिये तब क ने अ के पास जितने शेष बचे थे उतने उस को फेर दिये

ऐसा देन लेन तीन बार भया। तब दोनों के पास चैांसट २ रुपये भये। तो पहिले हर एक के पास कितने २ रुपये थे?

उत्तर, अ, के पास ८५ और क, के पास ४३ रुपये।

(५३) एक तलाव में कुछ कमल थे उस पर बैठने के लिये एक भ्रमरों का समूह आया। आते हि पहिले एक२ कमल पर एक२ भ्रमर बैठा। तब एक भ्रमर शेष बचा। फिर सब उड़े और एक २ कमल पर दो २ बैठे तब एक कमल शेष रहा। तो उस तलाव में कमल कितने थे और वे भ्रमर कितने थे?

उत्तर, कमल ३ और भ्रमर ४।

(५४) अ, के पास ११ मोती एक मोल के थे और क, के पास ८ हीरे एक मोल के थे और फिर जब उन में बहुत परस्पर स्नेह भया तब अ, ने ४ मोती क, को दिये और क, ने तीन हीरे अ, को दिये और सब मोती और हीरे उन्हों नें बेंच डाले। तब हर एक को २३० रुपये मिले। तब हर एक मोती का और हीरे का क्या २ मोल है सो कहो।

उत्तर, मोती का मोल २० रुपये और हीरे का ३० रुपये।

(५५) अ मनुष्य जो काम २४ दिन में करता है सो हि काम क मनुष्य ४० दिन में करता है तो वही काम अ और क मिल के कितने दिन में करेंगे?

उत्तर, १५ दिन में।

(५६) अ और क ये दो मनुष्य मिल के जो काम २० दिन में करते हैं वही काम अकेला अ ३६ दिन में करता है तो वह काम अकेला क कितने दिन में करेगा?

उत्तर, ४५ दिन में।

(५७) जिस भिन्न संख्या के अंश और छेद इन दोनों में १ जोड़ देओ तो उस का मान $\frac{१}{२}$ होता है और उन दोनों में १ घटा देओ तो उस का मान $\frac{१}{३}$ होता है। वह भिन्न संख्या क्या है?

उत्तर, $\frac{३}{७}$।

(५८) एक मनुष्य ने १२ रुपये की कुछ चवन्नी और दुअन्नी कर लिई, उन में चवन्नी और दुअन्नी की संख्या समान थी तो उसने कितने रुपये की चवन्नी और कितने की दुअन्नी किई सो कहो।

उत्तर, ८ रुपये की चवन्नी और ४ रुपये की दुअन्नी।

(५९) अ और क दो मनुष्यों के पास कुछ रुपये थे। उनमें अ ने क से कहा कि मेरे पास जो और २५ रुपये होते तो मेरे पास तेरे रुपयों से दूने रुपये होते। तब क ने कहा कि मेरे पास जो और २० हि रुपये होते तो मेरे पास तेरे से तिगुना धन होता तो हर एक के पास कितने २ रुपये थे?

उत्तर, अ के पास १३ और क के पास १९ रुपये।

(६०) अ, ने क, से कहा कि जो तुम हम को १ रुपया देओ तो हमारे पास तुम से दूने रुपये हो जाएंगे और जो दो रुपये देओ तो तिगुने हो जाएंगे। तो हर एक के पास कितने २ रुपये थे?

उत्तर, अ, के पास ७ और क, के पास ५ रुपये।

(६१) एक पुरुष और उस की स्त्री दो मिल के एक बर्तन भर घी १० दिन में खाते थे। एक बेर ऐसा हुआ कि उन दोनों ने चार दिन उस में से घी साथ खाया फिर वह पुरुष कहीं बाहर चला गया तब पीछे बचा हुआ घी अकेली स्त्री ने २१ दिन में खाया तब अकेला पुरुष कितने दिन में सब घी खा सकेगा और अकेली स्त्री कितने दिन में खा सकेगी?

उत्तर, पुरुष १४ दिन में और स्त्री ३५ दिन में।

(६२) हर एक पुरुष को दो पैसे, स्त्री को डेढ़ पैसा और लड़के को धेला इस नियम से किसी दाता ने २० दरिद्रों को २० पैसे बांट दिये उन दरिद्रों में पुरुषों से लड़के ७ अधिक थे । तो बताओ उन में पुरुष, स्त्री और लड़के कितने २ थे ।

उत्तर, ६ पुरुष, १ स्त्री और १३ लड़के ।

(६३) कोई पुरुष उस की स्त्री और पुत्र इन तीनों के वय के वर्षों की संख्याओं का योग ६४ है उस में पुरुष और स्त्री इन के वयों के अन्तर के तुल्य पुत्र का वय था और ४ बरस पहिले स्त्री का वय पुत्र के वय से सात गुना था । तब उन तीनों का वय कितना २ था?

उत्तर, पुरुष का वय ३२ वर्ष, स्त्री का २५ और पुत्र का ७ ।

(६४) जिस भिन्न संख्या के अंश में १ घटा देओ और छेद में १ जोड़ देओ तो उस का मान $\frac{1}{2}$ होता है । और उस के अंश और छेद के अन्तर के तुल्य एक नया अंश और योग के तुल्य एक नया छेद मानो तो उस नई भिन्न संख्या का मान $\frac{1}{6}$ होता है तब वह पूर्व भिन्न संख्या क्या है?

उत्तर, $\frac{5}{7}$ ।

(६५) जिन दो संख्याओं में पहिली में १ घटाओ और दूसरी में ३ जोड़ देओ इन दो फलों का गुणनफल और पहिली में १ जोड़ देओ और दूसरी में दो घटा देओ इन दो फलों का गुणनफल प्रत्येक उन्हीं दो संख्याओं के गुणनफल के समान होता है । वे दो संख्या कौन हैं?

उत्तर, ५ और १२ ।

(६६) किसी गृहस्थ के घर पर चोरी हुई । उसी समय उस ने थोड़े काल तक इधर उधर खोजा पर कुछ मिला नहीं तब उस के मन में आया कि एक घण्टा भर पहिले जो मनुष्य यहां से गया वही चोर है

तब चोर जिस मार्ग में अपनी एकरूप गति से जाता था उसी मार्ग पर वह गृहस्थ भी उस चोर को पकड़ने के लिये अपनी एकरूप गति से चला। यह पहिले दो घण्टे तक इसी अपनी चाल से चला और तब यह जाना कि चोर मेरे से हर घण्टे में ५ $\frac{१}{४}$ कोस अधिक चलता है। इस लिये उस ने तुरंत अपनी गति को दूना किया और जब वह घर से चला उस काल से ५ $\frac{१}{२}$ घण्टे में चोर को पकड़ा। तो चोर एक घण्टे में कितना चलता था और वह गृहस्थ आरम्भ में एक घण्टे में कितना चलता था और उस ने अपने घर से कितने अन्तर पर चोर को पकड़ा सो कहो?

उत्तर, चोर हर घण्टे में ४ $\frac{१}{२}$ कोस चलता था, गृहस्थ पहिले हर घण्टे में ३ $\frac{१}{४}$ कोस चलता था, और अपने घर से २९ $\frac{१}{४}$ कोस पर चोर को पकड़ा।

(६७) अ और क इन दो मनुष्यों को एक महाजन का कुछ २ ऋण था। अ ने महाजन को कुछ रुपये देके अपना $\frac{२}{३}$ ऋण दूर किया और इसी भांति क ने अपना $\frac{३}{४}$ ऋण दूर किया। तब अ को जितना ऋण शेष बचा उस से क को तिगुना ऋण बचा। जो इन को और तीन २ सौ रुपये अधिक ऋण होता और वे इसी भांति ऋण दूर करते तो अ के शेष ऋण से क का शेष ऋण दूना होता तो अ और क को कितना २ ऋण था?

उत्तर, अ को ३७५ रुपये और क को १५०० रुपये ऋण।

(६८) किसी महाजन के पास कुछ गौ घर पर थीं और कुछ गांव पर थीं। उन में हर महीने में घर की एक २ गौ को पांच २ रुपया और गांव की एक २ को दो २ रुपया लगता था। इस से गांव की सब गौवों के लिये जितना द्रव्य लगता था उस के दूने से एक रुपया अधिक इतना द्रव्य घर की सब गौवों के लिये लगता था। तब उस महाजन ने घर

को ९ गौ गांव पर भेज दिई इस से घर को और गांव की गौवों के लिये समान हि द्रव्य लगने लगा । तब पहिले उस महाजन की कितनी गौ घर पर थीं और कितनी गांव पर थीं?

उत्तर, घर पर २५ गौ और गांव पर ३१ ।

(६९) दो अङ्कों की एक ऐसी संख्या है कि जो उस में उन दो अङ्कों के योग का भाग देओ तो भजनफल ४ आता है और उस संख्या में जो उसी का आधा जोड़ देओ तो योग उन दो अङ्कों के योग के वर्ग के समान होता है । तो वह संख्या क्या है?

उत्तर, २४ ।

(७०) तीन संख्या ऐसी हैं कि जो उन में पहिली और दूसरी में एक २ जोड़ देओ तो पहिले योग से दूसरा योग दूना होगा, जो पहिली में और तीसरी में ६ जोड देओ तो पहिले योग से दूसरा योग तिगुना होगा और जो दूसरी में और तीसरी में १ जोड देओ तो पहिले योग से दूसरा योग चौगुना होगा । तो वे तीन संख्या क्या हैं सो कहो?

उत्तर, १, ३ और १५ ।

(७१) दो अङ्कों की एक संख्या ऐसी है की उस में जो ८ का भाग देओ तो लब्धि उन दो अङ्कों के योग के आधे के समान आती है और उस संख्या के दश स्थान के अङ्क के समान शेष रहता है । और उस संख्या के अङ्कों को पलट देने से जो संख्या बनेगी उस में जो ८ का भाग देओ तो भजनफल ६ आवेगा और पूर्व संख्या के एक स्थान कि अङ्क के समान शेष बचेगा । तो वह संख्या क्या है?

उत्तर, ३५ ।

(७२) अ, क, ग और घ इन चार मनुष्यों ने सायंकाल के समय गांव के बाहर एक खेत में कुछ गड़ा हुआ धन देखा और आपुस में ठहराया कि कल प्रातःकाल आके यह सब धन बांट लेंगे । परंतु उस रात के

पहिले हि प्रहर में अ मनुष्य खेत में जाके उस ने उस सब धन के चार समान विभाग किये ते। शेष कुछ नहीं रहा तब उस ने उस में मे एक विभाग लेके तीन विभाग वहां रख दिये । फिर दूसरे प्रहर में क मनुष्य वहां गया उस ने शेष धन के समान चार विभाग किये ते। शेष १ अशर्फी बची । तब क ने वह १ अशर्फी और एक विभाग लेके शेष धन वहां रख दिया । फिर तीसरे और चौथे प्रहर में क्रम से ग और घ मनुष्य वहां गये । इनों ने भी इसी प्रकार से उस में से धन लिया उस में ग के विभाग करने में दो अशर्फी और घ के विभाग करने में तीन अशर्फी बचीं । फिर दुसरे दिन प्रातःकाल चारों जने मिल के गये । उन्हों ने उस शेष धन के समान चार विभाग किये ते। शेष कुछ नहीं रहा । तब वह एक २ विभाग चारों ने लिया और सब अपने २ घर चले गये । तब ऐसा जाना गया कि क और ग को जितनी अशर्फी मिलीं उन के याेग से अ और घ के अशर्फिओं का याेग ५६ अधिक था । ते। सब धन में कितनी अशर्फी थीं और हर एक मनुष्य ने कितनी २ अशर्फी पाईं से। कहो ?

उत्तर, सब धन में २०६० अशर्फी थीं और उस में से अ ने ६७७, क ने ५४९, ग ने ४५३ और घ ने ३८१ अशर्फी पाईं ।

(७३) पांच मनुष्यों ने कुछ धन आपस में इस प्रकार से बांट लिया कि पहिले मनुष्य ने सब धन का चौथा भाग और २४३ रुपये लिये । फिर दूसरे ने जो शेष धन बचा उस का चौथा भाग और २४३ रुपये लिये । फिर जो शेष धन रहा से। भी क्रम से और तीन मनुष्यों ने इसी प्रकार से बांट लिया । तब अन्त में शेष कुछ नहीं रहा । ते। बताओ वह सब धन कितना था और हर एक मनुष्य ने कितने २ रुपये लिये ?

उत्तर, सब धन ३१२४ रुपये था और हर एक मनुष्य ने क्रम से १०२४, ७६८, ५७६, ४३२ और ३२४ रुपये लिये ।

(७४) एक बनिये ने कितने एक रुपयों के गेहूं १९ सेर के भाव के, कुछ रुपयों के १६ सेर के भाव के और ३३ रुपयों के १४ सेर के भाव के मोल लिये और ये तीनों प्रकार के गेहूं इकट्ठे करके सब १५ सेर के भाव से बेंच डाले तब उस में उस को १० रुपये लाभ हुआ। परंतु इन में जो पहिले दो प्रकार के गेहूं और छ२ रुपयों के मोल लेके मिला देता और सब १२ सेर के भाव से बेंचता तो उस को ४५ $\frac{3}{4}$ रुपये लाभ होता तो उस ने पहिले दो प्रकार के गेहूं कितने २ रुपयों के मोल लिये सो कहो?

उत्तर, पहिले प्रकार के गेहूं ३५ रुपयों के और दूसरे प्रकार के ४३ रुपयों के।

(७५) एक गाड़ी में चार चक्र थे। उन में आगे के समान दो चक्र छोटे थे और पीछे के समान दो चक्र बड़े थे। उस गाड़ी के ३६० हाथ भूमि चलने में जितनी बार बड़ा चक्र घूमता था उस से छोटा चक्र ९ बार अधिक घूमता था। परंतु बड़े चक्र का परिधि जो उस के $\frac{1}{5}$ के इतना और बड़ा होता और छोटे चक्र का परिधि उस के $\frac{1}{8}$ के इतना और बड़ा होता तो उतनी हि भूमि में जितनी बार बड़ा चक्र घूमता उस से छोटा चक्र १० बार अधिक घूमता। तो हर एक चक्र का परिधि कितने हाथ था सो कहो?

उत्तर, बड़ा परिधि १० हाथ और छोटा ८ हाथ।

(७६) एक कुण्ड में अ, क और ग ये तीन झरने थे। उस में केवल अ झरना खुला रखने से वह कुण्ड ३ घण्टे में भर जाता था और क खोल देने से ४ घण्टे में भर जाता था और ग खोल देने से पूरा कुण्ड दो घण्टे में खाली हो जाता था तो अ, क और ग इन तीनों को एक बेर खोल देने से वह कुण्ड कितने घण्टे में भर जावेगा?

उत्तर, १२ घण्टे में।

(७७) २९ और २३ इन दो संख्याओं के दो २ विभाग ऐसे करो कि उन दोनों संख्याओं के पहिले विभागों का योग २७ होवे और दूसरे विभागों का अन्तर १७ होवे ।

उत्तर, २९ के क्रम से विभाग ८, २१ और २३ के १९, ४ अथवा २९ के विभाग २५, ४ और २३ के २, २१ ।

(७८) एक मनुष्य नें अपने मरणसमय में अपना सब धन अपने पुत्रों को बांट दिया सेा इस प्रकार से कि उस का जितना धन था उस में से बड़े पुत्र को १२०० रुपये और शेष धन का $\frac{1}{9}$ (अर्थात् नैावां अंश) दिया। फिर जो शेष धन बचा उस में से दूसरे पुत्र को १८०० रुपये और शेष धन का $\frac{1}{9}$ दिया। यों ही आगे भी शेष धन में से हर एक पुत्र को उस के पहिले से ६० रुपये अधिक और शेष धन का $\frac{1}{9}$ दिया। तब अन्त में सब पुत्रों को समान धन मिला। तो उस मनुष्य का सब धन कितना था और उस को कितने पुत्र थे सेा कहो?

उत्तर, सब धन ३३६०० रुपये था और ७ पुत्र थे ।

(७९) तीन अङ्कों की एक संख्या ऐसी है कि उस में जो उन तीनों अङ्कों के योग का भाग देओ तो भजनफल ३० आता है और ६ शेष रहता है और उस संख्या में जो उस का आधा जोड़ के ३० घटा देओ तो शेष में उस संख्या के एक स्थान और शत स्थान के अङ्कों की स्थिति पलट जाती है और जो उस संख्या में ९ जोड़ देओ तो योग में उस संख्या के एक स्थान और दश स्थान के अङ्कों की स्थिति पलटती है तो वह संख्या क्या है?

उत्तर, ४५६ ।

(८०) दो अङ्कों की एक ऐसी संख्या है कि उस में ३ जोड़ के जो योग में उन दो अङ्कों के योग का भाग देओ तो भजनफल ३ आता है। परंतु उन दो अङ्कों की स्थिति को पलट देने से जो संख्या बनेगी

उन में ७ जोड़ के जो योग में उन दो अङ्कों के योग का भाग देओ तो लब्धि ८ आती है । वह संख्या क्या है?

उत्तर, ३७ ।

(८१) एक मनुष्य को पांच पुत्र थे । उस ने अपने मरण समय में अपना सब धन उन पांचों पुत्रों को इस प्रकार से बांट दिया । उस के जितने सब रुपये थे उन के समान पांच भाग किये तब एक रुपया शेष बचा । वह एक रुपया और एक भाग के रुपये सब बड़े लड़के को दिये तब जो शेष बचा उस के भी समान ५ भाग किये तब भी एकाहि रुपया शेष बचा । वह एक रुपया और वह पांचवा भाग यह दूसरे लड़के को दिया और इसी प्रकार से और तीन लड़कों को भी धन दिया । तब अन्त में जो शेष धन बचा उस के भी समान ५ भाग किये तब शेष कुछ नहीं रहा तब उस ने वे पांचों समान भाग पांचों लड़कों को दे दिये । उस में सब से बड़े लड़के को सब से छोटे लड़के की अपेक्षा से ३६९ रुपये अधिक मिले । तब उस मनुष्य के कितने रुपये थे और हर एक लड़के को कितने २ रुपये मिले सो कहो ।

उत्तर, उस मनुष्य का सब धन ३१२१ रुपये और पांचो लड़कों को क्रम से ८२९, ७०४, ६०४, ५२४ और ४६० इतने रुपये मिले ।

(८२) अ और क ये दो मनुष्य अलग अलग ५००० रुपये लेके व्यापार करने लगे । कुछ दिन में अ को उस व्यापार में लाभ हुआ और क को घाटा हुआ । तब अ के पास क के बचे हुए धन से दूना धन हो गया । परंतु क को जितना घाटा हुआ इतना जो अ को लाभ होता और अ को जितना लाभ हुआ इतना क को घाटा होता तो अ के पास क के बचे द्रव्य से तिगुना द्रव्य हो जाता । तो अ को कितने रुपये लाभ हुआ और क को कितने रुपये घाटा हुआ सो कहो । -

उत्तर, अ को ३००० रुपये लाभ हुआ और क को १००० रुपये घाटा हुआ ।

(८३) एक नदी के तीर पर अ और क ये दो गांव परस्पर १२ कोस के अन्तर पर थे। उस में उस नदी का जल अ गांव से क गांव की ओर वेग से बहता था। एक डोंगी अ गांव से क गांव की ओर नदी के बीच धारा में चलाई वह दो घण्टे में क गांव में पहुंची। उस को फिर अ गांव में ले आना था और नदी के बीच धारा में जल का वेग बहुत था परंतु तीर के पास उस वेग का $\frac{१}{३}$ वेग था। इस लिये डोंगी को तीर के पास होके चलाया तब वह ३ घण्टे में अ गांव में पहुंची तो १ घण्टे में पानी की और डोंगी की गति कितनी २ थी।

उत्तर, १ घण्टे में पानी की गति १$\frac{१}{२}$ कोस और डोंगी की ४$\frac{१}{२}$ कोस।

(८४) अ, क और ग इन तीनों के मिल के १०००० रुपये थे उस में अ और क इन के रुपये मिल के क से १८४२ अधिक थे और क और ग इन के रुपये मिल के अ से २९१६ अधिक थे तब हर एक के कितने २ रुपये थे?

उत्तर, अ के ३५४२, क के २३७९ और ग के ४०७९।

(८५) एक बर्तन ६ सेर दूध और ४ सेर पानी इकट्ठा मिला के उस से भरा हुआ था और दूसरा बर्तन ३ सेर दूध और ५ सेर पानी मिला के उस से भरा हुआ था। अब इन दोनों बर्तनों में से कुछ कुछ मिश्र पदार्थ ले के एक तीसरा ९ सेर का बर्तन भर देना है ऐसा कि जिस में आधा दूध और आधा पानी होवे तो हर एक पात्र में से कितना २ मिश्र पदार्थ लिया चाहिये सो कहो?

उत्तर, पहिले में से ५ सेर और दूसरे में से ४ सेर।

(८६) एक बनिये ने कितने एक रुपयों के चावल १५ सेर के भाव से मोल लिये और कितने एक रुपयों के ११ सेर के भाव से लिये। और वे दोनों प्रकार के चावल इकट्ठे कर के १२ सेर के भाव से बेंच

डाले। तब उस को उस में १०० रुपये लाभ हुआ। परंतु उस ने जितने रुपयें के चावल १५ सेर के भाव से मेाल लिये उतने रुपयें के जेा ११ सेर के भाव से मेाल लेता और ११ के भाव के मेाल लेने में जितने रुपये लगे उन रुपयें के १५ के भाव के मेाल लेता और फिर उन को मिला के पहिले के नाईं बेंच डालता तेा उस में उस को ११० रुपये लाभ होता। तेा उस ने कितने २ रुपयें के दोनें प्रकार के चावल मेाल लिये?

उत्तर, ६१५ रुपयें के चावल १५ सेर के भाव से मेाल लिये और ६४५ रुपयें के चावल ११ सेर के भाव से लिये।

(८७) एक मनुष्य के पास तीन थैली समान रुपयें से भरी हुई थीं वह तीनें थैली ले के बाजार में गया। वहां एक जवहरी की दूकान पर जाके अपनी एक थैली में से ५ रुपये निकाल लिये तब उस थैली में जितने रुपये बचे उतने उस जवहरी को दे के उस से दो हीरे मेाल लिये। इसी प्रकार से अपनी दूसरी थैली में से १५ रुपये ले के शेष रुपयें उस जवहरी को दिये और २४ मानिक मेाल लिये और यें ही तीसरी थैली में से २५ रुपये ले के शेष रुपये जवहरी को दिये और उस से ५५ मोती मेाल लिये। उस में एक हीरा, एक मानिक और एक मोती इन तीनें का मेाल मिल के ८२ रुपये था। तेा एक २ रत्न का अलग २ कितना मेाल था और हर एक थैली में कितने रुपये थे सेा कहेा?

उत्तर, एक हीरे का मेाल ७५ रुपये, मानिक का ५ रुपये और मोती का २ रुपये और हर एक थैली में १३५ रुपये थे।

(८८) किसी महाजन ने ७००० रुपयें के दो विभाग कर के अलग २ भाव से ऋण दिये उस में बड़े विभाग में एक बरस में सेा रुपयें का जितना व्याज था उस से छोटे विभाग में ३ रुपये अधिक था। पीछे कुछ काल में बड़े विभाग में सेा को एक रुपया व्याज बढा दिया

और छोटे में सौ को उतना ही घटा दिया। इस से सब रुपयों का व्याज उस के $\frac{1}{44}$ के इतना बढ गया। परन्तु जो बड़े विभाग में व्याज का भाव ज्यों का त्यों रख के छोटे विभाग में सौ का व्याज दो रुपये घटाया जाता तो एक बरस में सब रुपयों के व्याज के $\frac{3}{4}$ से ५० रुपये अधिक व्याज आता। तो मूल धन के दो विभाग कितने २ थे और हर एक विभाग में सौ को कितना २ व्याज था सो कहो?

उत्तर, बड़ा विभाग ४००० रुपये और छोटा ३००० रुपये और बड़े में एक बरस में सौ को ५ रुपये व्याज और छोटे में ८ रुपये।

(८९) एक आराम (अर्थात् बगीचा) आयत क्षेत्र के आकार का था उस में एक कोने में उसी आकार का एक तलाव ऐसा था कि उस का कर्णसूत्र आराम के कर्णसूत्र ही में था और उस की परिमिति (अर्थात् चारों भुजों का योग) आराम की परिमिति से ४२० हाथ न्यून थी और उस का क्षेत्रफल आराम के क्षेत्रफल का $\frac{1}{16}$ अर्थात् षोडशांश था। जो उस आराम की लम्बाई ४ हाथ और अधिक होती और चौडाई ३ हाथ अधिक होती तो उस आराम का क्षेत्रफल ९७२ वर्ग हाथ बढ जाता। तो उस आराम की परिमिति कितनी थी और उस की लम्बाई और चौडाई कितनी २ थी?

उत्तर, आराम की परिमिति ५६० हाथ, लम्बाई १६० हाथ और चौड़ाई १२० हाथ।

(९०) एक महाजन ने ३०३७ रुपयों के विषम तीन विभाग कर के तीन मनुष्यों को ऋण दिये। उस में एक बरस में सौ रुपयों को ४ रुपये व्याज के भाव से पहिले मनुष्य को दिये, ५ रुपये व्याज के भाव से दूसरे को और ६ रुपये व्याज के भाव से तीसरे को दिये। उन तीनों मनुष्यों ने अढाई बरस में अपना २ व्याज समेत ऋण समान हि ले

आके महाजन को दे दिया उस से तीनों ऋणमुक्त हुए। तो उस महाजन ने हर एक मनुष्य को कितना२ ऋण दिया था सो कहो?

उत्तर, पहिले मनुष्य को १०३५ रुपये, दूसरे को १०१२ रुपये और तीसरे को ९९० रुपये ऋण दिया था।

(९१) अ, क और ग इन तीन बनियों के पास कुछ२ रुपये थे। उस में अ ने अपने रुपयों के १२ सेर के भाव से चने मोल लेके १० सेर के भाव से बेंच डाले। यों क ने अपने रुपयों की १० सेर के भाव से दाल ले के ८ सेर के भाव से बेंच डाली और ग ने अपने रुपयों के ८ सेर के भाव से चावल ले के ६ सेर के भाव से बेंच डाले। तब अ, क और ग इन तीनों को मिल के २१ रुपये लाभ हुआ। जो वे तीनों पहिले अपने सब रुपये इकट्ठे कर के उन सब के ९ सेर के भाव से गोहूं मोल ले के ७ सेर के भाव से बेंच डालते तो तीनों को मिल के २४ रुपये लाभ होता। परंतु पहिले व्यापार से इस व्यापार में क को जितना अधिक धन मिलता उतना हि ग को घाटा होता। तो हर एक बनिये के पास पहिले कितने२ रुपये थे?

उत्तर, अ के पास ३५, क के २८ और ग के २१ रुपये थे।

(९२) किसी दाता के द्वार पर कुछ पुरुष, स्त्री और लड़के भीख मांगने के लिये खड़े थे। उन में पुरुषों से स्त्री ४ अधिक थीं और स्त्रियों से लड़के ६ अधिक थे। तब वह दाता घर में से समान पैसों से भरी हुई तीन थैली बाहर ले आया। उन में एक थैली के पैसे सब पुरुषों को समान बांट दिये, दूसरी के सब स्त्रियों को और तीसरी के सब लड़कों को। तब जाना गया कि हर एक लड़के को जितने२ पैसे मिले उन से हर एक स्त्री को एक एक पैसा अधिक मिला और हर एक पुरुष को दो दो पैसे अधिक मिले। तो उन याचकों में पुरुष, स्त्री और लड़के कितने२ थे और प्रत्येक थैली में कितने पैसे थे?

उत्तर, २० पुरुष, २४ स्त्री और ३० लड़के और प्रत्येक थैली में १२० पैसे थे।

(९३) कोइ मनुष्य एक दिन अपने गांव से दूसरे गांव चला । वह पहिले कुछ कोस तक अपनी साधारण गति से चला जब उस ने जाना कि जिस गांव पर जाना है वह यहां से ९ कोस दूर है तब उस ने अपने चलने का वेग १ घड़ी में एक कोस अधिक जाने का किया । परंतु जो वह अपने वेग को न बढ़ाता और अपनी साधारण गति से चलता तो उस दूसरे गांव में डेढ़ घड़ी पीछे से पहुंचता और जो प्रारम्भ ही से वह बढाए हुए वेग से चलता तो उस गांव में १ घड़ी पहिले पहुंचता । तो उन दो गांव के बीच में कितने कोस अन्तर था?

उत्तर, १५ कोस ।

(९४) अ, क, ग, और घ ये चार भिन्न रत्नों के व्यापारी थे । उन में अ के पास समान मोल के १६ मानिक थे । वैसे ही क के पास २० नीलमणि, ग के पास ९२ मोती और घ के पास ७ हीरे थे । इन में हर एक ने अपने पास का एक २ रत्न और तीनों को दिया । तब सब के जितने २ रत्न हुए उन का द्रव्य तुल्य हुआ । अब चारो जात के चार रत्नों का मोल मिल के २५९ रुपये था । तो हर एक रत्न का मोल क्या था सो कहो?

उत्तर, एक मनिक का मोल ४४ रुपये, नीलमणि का ३३ रुपये, मोती का ६ रुपये और हीरे का १७६ रुपये ।

(९५) अ, क, ग और घ ये चार मनुष्य पशुओं का व्यापार करते थे उन में अ के पास ६ घोड़े, ३ ऊंट, ९ बैल और ८ कुत्ते इतने पशु थे और ये ही पशु, क के पास क्रम से ४, ८, ३ और २ थे, ग के पास ७, ५, २ और ३ थे और घ के पास ९, २, ४ और १ इतने थे । इन चारो व्यापारिओं ने अपने २ सब पशु बेंच डाले इस से सभों को समान रुपये मिले । अब इन में सब सजातीय पशुओं का मोल समान था और इन चारों जात के चार पशुओं का मोल मिल के १८६ रुपये था । तो हर एक पशु का मोल क्या था सो कहो ?

उत्तर, एक घोड़े का मोल ८१ रुपये, ऊंट का ७२, बैल का ३० और कुत्ते का ३ रुपये ।

(९६) एक कुण्ड में पानी आने के लिये चार झरने थे जो वे चारों खुले रहें तो एक दिन रात में अर्थात् २४ घण्टे में चारों झरनों से पानी मिल के ७३ मन आवे । और इतना उस कुण्ड में नहीं समाता था । परंतु जो पहिला झरना १२ घण्टे खुला रहे और तीनों दिन रात खुले रहें तो समग्र कुण्ड जल से भर जावे । वा जो दूसरा झरना ८ घण्टे खुला रहे और तीनों दिन रात खुले रहें तौभी कुण्ड समग्र जल से भर जावे । वा जो तीसरा झरना ६ घण्टे और सब तीनों २४ घण्टे तक खुले रहे तौभी वह जल से भर जाता था । ऐसा हि जो चौथा झरना केवल ४ घण्टे ४८ मिनिट तक खुला रहे और सब रात दिन खुले रहे तौभी एक अहोरात्र में सब कुण्ड जल से पूर्ण होता था । तो २४ घण्टों में हर एक झरने से कितना २ पानी आता था और उस कुण्ड में कितने मन पानी समाता था सो कहो ।

उत्तर, पहिले झरने से २४ मन, दूसरे से १८, तीसरे से १६ और चौथे से १५ और उस कुण्ड में ६१ मन पानी समाता था ।

(९७) । अ, क, ग और घ ये चार मनुष्य कुछ २ रुपये लेके इकट्ठे द्यूत खेलने बैठे उस में अ और घ के रुपये मिलके क और ग के रुपयों के योग से २४४ अधिक थे । उस खेल में पहिले अ मनुष्य जीता तब उस ने अपने पास जितने रुपये थे उतने २ रुपये और तीनों से ले लिये । फिर दूसरी बार खेल में क जीता तब उस ने भी अपने पास जितना धन था उतना २ धन औरों से लिया । तब क्रम से ग, और घ ये दोनो जीते उन्हों ने भी वैसा ही धन औरों से लिया । तब अन्त में सब के पास समान रुपये हो गये । तब खेल के आरम्भ में हर एक के पास कितने २ रुपये थे सो कहो ।

उत्तर, अ के पास १२५, क के २२५, ग के ३०५ और घ के ३६९ रुपये।

(९८) । एक मनुष्य ने ३ रुपयों के ५ कबूतर, ५ रुपयों के ७ सारस पक्षी, ७ रुपयों के ८ हंस पक्षी और ८ रुपयों के ३ मोर इस भाव से १००

रुपयों के १०० पक्षी इसी भांति मेाल लिये कि उनमें जितने सारस पक्षी थे उतने हि मेार थे और जितने रुपयों से हंस पक्षी मेाल लिये उस से दूने रुपयों के मेार लिये तेा बताओ उस मनुष्य ने वे चारो जाति के पक्षी कितने २ मेाल लिये?

उत्तर, ४५ कबूतर, १४ सारस पक्षी, २७ हंस और १४ मेार ।

(९९) पांच मनुष्य अपने पास कुछ २ धन ले के इकट्ठे द्यूत खेलने बैठे उन में आरम्भ में पांचवे मनुष्य के पास जितने रुपये थे उस से पहिले मनुष्य के पास ३२५ रुपये अधिक थे। तब खेल में पहिले हि प्रथम मनुष्य हार गया तब उसने और चारों के पास जितना २ धन था उस के आधे से एक रुपया अधिक इतना २ धन सब केा दिया । इसी भांति दूसरा तीसरा इत्यादि मनुष्य क्रम से हार गये और उन्हों ने भी ऐसा हि धन औरों को दिया । तब अन्त में सभों के पास समान रुपये हेा गये । तब खेल के आरम्भ में हर एक मनुष्य के पास कितने २ रुपये थे सेा कहेा ।

उत्तर, पांचों मनुष्यों के पास क्रम से ४३५, ३००, २१०, १५० और ११० इतने रुपये थे ।

(१००) एक गढ के चारो केानों पर मिल के १९४० येाधा लेाग रहते थे। एक बार जिस केाने पर थेाड़े लेाग थे उधर शत्रु आके लड़ने लगा तब उस केाने पर जितने लेाग थे उतने हि उतने लेाग और तीन केानों से उस पर आके वहां से उस शत्रु केा हटा दिया पर उन लेागों में से लड़ाई में आधे लेाग मर गये । तब शत्रु दूसरे केाने पर गया वहां भी ऐसा हि हुआ और यांही तीसरे और चेाथे केाने पर हुआ । फिर देखते हैं तेा सब केानों पर समान लेाग हुए तेा पहिले हर एक केाने पर कितने २ लेाग थे?

उत्तर, पहिले केाने पर २७०, दूसरे पर ४५०; तीसरे पर ५७०, और चेाथे पर ६५० ।

९३। अब इस के उत्तर पक्रमों में प्रश्नसम्बन्धि कुछ विशेष कह के इस अध्याय को और पूर्वार्ध को भी समाप्त करते हैं।

ऊपर के प्रक्रम में जो प्रश्न लिखे हैं इन में जहां किसी पदार्थ की सामान्य रूप से गति की चर्चा आवेगी वहां उस गति को एकरूप समझना चाहिये। जैसा। किसी मनुष्य की वा जल के प्रवाह की गति १ घड़ी में अ कोस कही हो तो वह मनुष्य वा जल दो घड़ी में २ अ कोस, तीन में ३ अ, चार में ४ अ और य घड़ी में अय कोस गति जानो। इसी प्रकार से कीसी झरने में से पानी के आने वा जाने की बात जहां हो वहां भी एक पल में जितना पानी आवेगा वा जायगा दो पल में उस से दूना, तीन पल में उस से तिगुना इत्यादि जानो। ऐसा हि कोइ मनुष्य जो कुछ काम बनाता हो उस में एक घड़ी में जितना बनता हो दो घड़ी में उस से दूना और अ घड़ी में उस से अ गुण इत्यादि। इसी प्रकार से सजातीय प्राणिओं के सामान्य रूप से बेंचने वा मोल लेने में सब सजातीय प्राणिओं का मोल समान जानो। इत्यादि सर्वत्र इस में गति की वृद्धि वा ह्रास और सजातीय पदार्थ का मोल इत्यादि को एकरूप समझो। और किसी की अनियत गति वा मान से प्रश्न का उत्तर न बनेगा।

९४। बीजगणितसंबन्धि प्रश्न के उत्तर में जब कि धन, धान्य आदि पदार्थ वा देश अर्थात् रेखा, क्षेत्र इत्यादि जिस में लम्बाई रहती है वा काल अर्थात् घड़ी, दिन मास इत्यादि इसी की संख्या प्रायः रहती है और वह अभिन्न वा भिन्न प्रत्येक धन वा ऋण होती है। उस में व्यक्तगणित में केवल संख्या का अभिन्नत्व और भिन्नत्व मात्र दिखलाया है परंतु उस के धनत्व और ऋणत्व की चर्चा उस में नहीं है। यह चर्चा बीजगणित में है। इस लिये अब हम पदार्थ, देश और काल इन के धनत्व और ऋणत्व के विषय में कुछ यहां संक्षेप से लिखते हैं।

किसी के पास जो द्रव्य वा धान्य इत्यादि पदार्थ उसी का है वह उस का धन है इस लिये उस पदार्थ की संख्या धन कहाती है और जो पदार्थ उस के पास दूसरे का हो वह उस का ऋण है इस लिये उस पदार्थ की संख्या ऋण कहाती है। यों पदार्थ का धनत्व और ऋणत्व है। इसी प्रकार से जब एक स्थान से कोइ किसी एक दिशा में चला जाता है तब उस का उस स्थान से जितना अन्तर हो वह अन्तर देश उस का धन है। इस लिये उस अन्तर देश की संख्या धन कहलाती है। और जब वह उसी दिशा की विपरीत दिशा में चलेगा अर्थात् उसी मार्ग में पीछे चलेगा तब वह चलने का देश उस का ऋण है इस लिये उस उलटी दिशा में चले हुए देश की संख्या ऋण कहाती है। जैसा कोइ मनुष्य किसी नगर से पूर्व दिशा में १० कोस गया और फिर वहां से लैाट के पश्चिम दिशा में अर्थात् पूर्व दिशा की विपरीत दिशा में ७ कोस पीछे चला गया तब यहां १० यह संख्या धन है और ७ यह ऋण संख्या है। यहां जो ऐसा प्रश्न हो कि वह मनुष्य तब उस नगर से कितनी दूर पर किस दिशा में होगा? तो यहां + १० और – ७ इन का योग + ३ है इस लिये वह मनुष्य उस नगर से ३ कोस पर होगा और तीन धन है इस लिये उस नगर से पूर्व दिशा में होगा। यह उस प्रश्न का उत्तर है। और जो वह मनुष्य लैाट के पश्चिम दिशा में १२ कोस चला हो तो यहां १२ यह संख्या ऋण होगी। तब + १० और – १२ इन का योग – २ है इस लिये वह मनुष्य उस नगर से पश्चिम में दो कोस पर होगा। यह उत्तर है। यों देश का धनत्व और ऋणत्व है। और इसी भांति किसी क्षण से जैसा सूर्योदय से १० घड़ी बीती हैं यह १० संख्या धन है तब यहां से पीछे उलटा जो काल होगा उस की संख्या ऋण है। यों काल का धनर्णत्व है। यों सर्वत्र धन संख्या से विपरीत ऋण संख्या जाना। इस लिये प्रश्न के उत्तर में जो कोइ मान ऋण आवे तो जो वह वृद्धि का मान हो तो उतना ह्रास जाना। जो ह्रास का मान ऋण आवे तो उतनी वृद्धि समझो। यों जो लाभ का मान ऋण हो तो उतनी हानि

जानो । जो हानि का मान ऋण हो तो उतना लाभ जानो । इत्यादि । यों जो पूर्व देश का मान ऋण आवे तो वह पश्चिम देश का मान होगा । पश्चिम देश का मान ऋण हो तो पूर्व देश का होगा । यों उत्तर देश के ऋण मान को दक्षिण देश का और दक्षिण देश के ऋण मान को उत्तर देश का मान जानो । इत्यादि । इसी प्रकार से किसी क्षण से उत्तर अर्थात् भविष्यत् काल का मान जो ऋण आवे तो वह उस क्षण के पीछे का उलटा काल अर्थात् भूतकाल जानो । जो भूतकाल का मान ऋण आवे तो वह भविष्यत् काल का जानो । इत्यादि । यों ही जब प्रश्न के उत्तर में केवल संख्या का मान ऋण आवे तो प्रश्न की बोली में जहां उस संख्या को जोड़ने कहा होगा वहां घटाना और जहां घटाना कहा होगा वहां जोड़ देना कहो । इस लिये प्रश्न के उत्तर में जो ऋण मान आवे तो ऊपर जो ऋणत्व का प्रतिपादन किया है उस के अनुसार प्रश्न के उस उत्तर की प्रतीति कर लेओ ।

९५ । ऊपर के प्रक्रम में जो प्रतिपादन किया है उस का अच्छी भांति बोध होने के लिये इस में बीजसूत्र का लक्षण लिख के उस पर और कुछ विशेष लिखते हैं ।

बीजगणित के प्रश्न में जो मान व्यक्त अर्थात् ज्ञात हैं उन के स्थान में अ, क इत्यादि वा प, फ इत्यादि अक्षर मान के जो अव्यक्त राशि का मान उन्हीं अक्षरों में ले आओ तो अन्त में जो समीकरण उत्पन्न होता है अर्थात् जिस में अव्यक्त राशि के समान व्यक्त राशिओं के द्योतक अक्षरों में एक पक्ष उत्पन्न होता है वह समीकरण 'बीजसूत्र' कहलावे । इस बीजसूत्रसंज्ञक समीकरण में व्यक्त अक्षरों का उन की संख्याओं से उत्थापन करने से तुरंत अव्यक्त राशि का मान ज्ञात होता है । और इस प्रकार से जिस प्रश्न का बीजसूत्र उत्पन्न करो उस से उस प्रश्न के सजातीय जितने प्रश्न होंगे उन सभों का उत्तर केवल व्यक्त की रीति से जानने का सूत्र अर्थात् विधि उत्पन्न होता है । जैसा ऊपर

(९२) वे प्रक्रम में जिन प्रश्नों का गणित करके दिखलाया है उन में (८) वे और (९) वे प्रश्न के गणित में उस २ प्रश्न का बीजसूत्र उत्पन्न किया है। इस बीजसूत्र पर और विचार करने के लिये कुछ प्रश्न लिखते हैं।

प्रश्न १। जिस संख्या को अ में घटा के अन्तर को क में जोड़ देओ तो योग ग होता है वह संख्या क्या है?

मानो, य = वह संख्या

तब, क + (अ − य) = ग

∴ समक्रिया से, य = अ + क − ग।

इस लिये य = अ + क − ग, यह इस भांति के प्रश्न का बीजसूत्र है। इस में अ, क और ग इन का मान चाहो सो मान के उन का उत्थापन करने से य का मान तुरंत ज्ञात होगा।

जैसा। जो अ = ४, क = ५ और ग = ६ मानो

तो य = ४ + ५ − ६ = ३।

अर्थात् जिस संख्या को ४ में घटा के अन्तर को ५ में जोड़ देओ तो योग ६ होता है वह संख्या ३ है। क्यों कि ३ को ४ में घटा देने से अन्तर १ होता है इस को ५ में जोड़ देओ तो योग ६ होता है। इस लिये ३ यह उस संख्या का मान ठीक है।

परंतु जो अ = ५, क = ७ और ग = ४ मानो

तो य = ५ + ७ − ४ = ८।

अर्थात् जिस संख्या को ५ में घटा के अन्तर को ७ में जोड़ देओ तो योग ४ होता है वह संख्या ८ है। इस लिये उस संख्या का मान जो ८ कहें तो प्रश्न की बोली के अनुसार इस की प्रतीति नहीं होती। क्यों कि ८ यह संख्या पहिले हि ५ में नहीं घट सकती। यों लोक में यह उत्तर अनुपपन्न अर्थात् प्रतीति करने के योग्य नहीं है। इस लिये ऊपर के प्रक्रम में जो ऋणत्व का प्रतिपादन किया है उस के अनुसार इस प्रश्न की बोली यों पलट दिई जावे कि जिस संख्या में ५ घटा के अ-

न्तर को ७ में घटा देओ तो अन्तर ४ होता है तो इस प्रश्न का ८ यह उत्तर उपपन्न अर्थात् प्रतीति के योग्य हो सकता है ।

इस प्रकार से श्रीभास्कराचार्य ने भी लिखा है कि

यत्र क्वचिच्छुद्धिविधौ यदेह
शोध्यं न शुध्येद्विपरीतशुद्धा ।
विधिस्तदा प्रोक्तवदेव किंतु
योगे वियोगः सुधिया विधेयः ॥

इस का अर्थ । यहां जब कहीं अन्तर करने में घटाने की संख्या न घट सके वहां उलटा घटा के (अर्थात् जिस में घटाना है उसी को घटाने की संख्या में घटा के) उस अन्तर से आगे जो विधि कहा हो उसी के अनुसार बुद्धिमान् सब गणित करे किंतु जहां योग करना हो वहां अन्तर करे ।

इसी प्रकार से य = अ + क − ग इस बीजसूत्र में
जो अ = ३, क = ८ और ग = १३ मानो
तो य = ३ + ८ − १३ = −२ ।

अर्थात् जिस संख्या को ३ में घटा के अन्तर को ८ में जोड़ देओ तो योग १३ होता है वह संख्या क्या है? इस प्रश्न का उत्तर −२ आता है । परंतु केवल ऋण संख्या लोक में अनुपपन्न है इस लिये ऊपर के प्रक्रम के अनुसार इस प्रश्न की बोली यों पलट दिई जावे कि जिस संख्या को ३ में जोड़ के योग को ८ में जोड़ देओ तो योग १३ होता है तो वह संख्या २ है यह इस प्रश्न का उत्तर प्रतीति के योग्य होता है ।

प्रश्न २ । आ मनुष्य का वय अ बरस है और का का क बरस है तो कब आ का वय का के वय से गगुण होगा?

यहां मानो कि य बरस के उपरान्त गगुण होगा
इस लिये अ + य = ग (क + य)
समक्रिया से, $य = \frac{अ - कग}{ग - १}$

इस लिये इस जाति के प्रश्न का $य = \frac{अ - कग}{ग - १}$ यह बीजसूत्र है। इस में अ, क और ग इन का इष्ट संख्याओं से उत्थापन करने से य का मान स्पष्ट होगा।

अब इस बीजसूत्र को देखने से स्पष्ट ज्ञात होता है कि जो इस में य का मान धन अभीष्ट हो तो क और ग इन के गुणनफल से अ का मान अवश्य बड़ा चाहिये नहीं तो य का मान ऋण होगा।

जैसा। जो अ = २५, क = ११ और ग = २

$$तो\ य = \frac{२५ - ११ \times २}{२ - १} = ३$$

अर्थात् आ का वय २५ बरस और का का ११ बरस हो तो तीन बरस उपरान्त आ का वय का के वय से दूना होगा।

परंतु जो अ = ३४, क = १८ और ग = २

$$तो\ य = \frac{३४ - १८ \times २}{२ - १} = -२।$$

यहां कग से अ का मान छोटा है इस से य का मान ऋण दो है इस लिये ऊपर के प्रक्रम में जो लिखा हैं उस के अनुसार यहां आ का वय ३४ बरस और का का वय १८ बरस हो तो आ का वय का के वय से दूना कब होगा? इस प्रश्न का यह उत्तर होगा कि दो बरस पहिले आ का वय का के वय से दूना था।

इस प्रकार से यहां स्पष्ट है कि धन मान जो भविष्यत्काल का हो तो ऋण मान भूतकाल का होगा।

प्रश्न ३। एक कुण्ड में अ, क और ग ये तीन पानी के झरने हैं उन में जो अ और क ये दो झरने एक काल में खोल देओ ते वह कुण्ड प घड़ी में जल से भर जाता है, जो अ और ग ये दो खोल देओ तो वह कुण्ड फ घड़ी में भरता है और क और ग इन दो झरनों को खोल देने से वह कुण्ड ब घड़ी में भरता है तो अलग २ एक २ झरना खुला रखने से वह कुण्ड कितनी २ घड़ी में भरेगा?

मानेा कि अ, क और ग ये तीन झरने अलग २ काल में खुले रखने से क्रम से य, र और ल घड़ी में सब कुण्ड जल से भर जायगा

इस लिये $\frac{१}{य}+\frac{१}{र}=\frac{१}{प}$, $\frac{१}{य}+\frac{१}{ल}=\frac{१}{फ}$ और $\frac{१}{र}+\frac{१}{ल}=\frac{१}{ब}$ ।

∴ समक्रिया से, $य=\frac{२ पफब}{पब+फब-पफ}$, $र=\frac{२ पफब}{पफ+फब-पब}$,

और $$ल=\frac{२ पफब}{पफ+पब-फब} ।$$

इस प्रकार से इस प्रश्न में तीन अव्यक्तों के लिये तीन बीजसूत्र हैं। इन में जो प = १२, फ = १५ और ग = २० हो

$$तो \quad य=\frac{२ पफब}{पब+फब-पफ}=\frac{७२००}{३६०}=२०,$$

$$र=\frac{२ पफब}{पफ+फब-पब}=\frac{७२००}{२४०}=३०,$$

$$और \quad ल=\frac{२ पफब}{पफ+पब-फब}=\frac{७२००}{१२०}=६० ।$$

अर्थात् एक कुण्ड में जो अ और क ये दो झरने एक काल में खोल देओ तो वह कुण्ड १२ घड़ी में जल से भरेगा, अ और ग को एक काल में खोल देओ तो १५ घड़ी में भरेगा और क और ग को खोल देओ तो २० घड़ी में भरेगा। तो अलग २ काल में हर एक झरने से कितनी २ घड़ी में वह कुण्ड जल से भरेगा? इस में अ, क और ग ये तीनो झरने अलग २ काल में खुले रखने से वह कुण्ड क्रम से २०, ३० और ६० घड़ी में भर जायगा ।

परंतु इन बीजसूत्रों में जो प = १२, फ = ३० और ब = ६० मानो

$$तो, \quad य=\frac{२ पफब}{पब+फब-पफ}=\frac{४३२००}{७२०+१८००-३६०}=\frac{४३२००}{२१६०}=२०,$$

$$र=\frac{२ पफब}{पफ+फब-पब}=\frac{४३२००}{३६०+१८००-७२०}=\frac{४३२००}{१४४०}=३०,$$

$$ल=\frac{२ पफब}{पफ+पब-फब}=\frac{४३२००}{३६०+७२०-१८००}=\frac{४३२००}{-७२०}=-६० ।$$

अर्थात् अ, क और ग इन तीनों झरनों में दो २ झरने खुले रखने से जो वह कुण्ड क्रम से १२, ३० और ६० घड़ी में भरेगा तो केवल अ झरना खुला रखने से २० घड़ी में भरेगा, क खुला रखने से ३० घड़ी में भरेगा और ग झरने के काल का मान ऋण ६० घड़ी आया है परंतु

ऊपर के प्रक्रम में दिखलाया है कि काल की ऋण संख्या भूतकाल की अर्थात् पीछे के काल की द्योतक है। इस लिये जैसा अ और क झरनों के काल का मान धन है इस कारण से जब कुण्ड जलरहित है उस काल के उपरान्त २० घड़ी तक अ झरना खुला रहे वा ३० घड़ी तक क झरना खुला रहे तो वह कुण्ड जल से पूर्ण हो जाता है तैसा ग झरने के काल का मान ऋण होने से जब कुण्ड जलरहित है उस काल के पीछे ६० घड़ी तक ग झरना खुला रहे तो वह कुण्ड जल से पूर्ण रहता है। यह ६० घड़ी के ऋणत्व का अर्थ है। इस से स्पष्ट प्रकाशित होता है कि उस कुण्ड में अ और क ये दो झरने उस में पानी आने के लिये थे और इन से क्रम से २० और ३० घड़ी में वह कुण्ड जल से पूर्ण होता था। और ग यह झरना कुण्ड का पानी उस में से निकलने के लिये था और इस से वह कुण्ड भर जल ६० घड़ी में सब निकल जाता था।

९६। ऊपर के प्रक्रम में उस २ प्रकार के प्रश्न का उत्तर जानने के लिये अलग २ बीजसूत्र उत्पन्न करने का प्रकार दिखलाया। परंतु जिस से एकवर्णएकघातसमीकरणसंम्बन्धि प्रश्नमात्र का उत्तर ज्ञात हो ऐसा भी बीजसूत्र उत्पन्न हो सकता है। उस में लाघव के लिये जिन प्रश्नों में अव्यक्त राशि किसी व्यक्त संख्या से गुणा वा भागा हुआ हो वा अपने हि किसी अंश से जोड़ा हुआ वा घटाया हुआ हो ऐसे प्रश्नों के उत्तर के लिये एक छोटा बीजसूत्र होता है। और (एकवर्ण-एकघातसंवन्धि) सकल प्रश्नों के उत्तर के लिये एक बड़ा बीजसूत्र है। उस में पहिले बीजसूत्र से जो विधि उत्पन्न होता है उस को इष्ट-कर्म कहते हैं और दूसरे से जो विधि वनता है उस को द्वीष्टकर्म कहते हैं। इन बीजसूत्रों के विधिओं से एकवर्णएकघातसंवन्धि समय प्रश्नों के उत्तर अव्यक्त अक्षर की कल्पना के विना केवल व्यक्त की रीति से ज्ञात हो सकते हैं। इस लिये अनन्तर के दो प्रक्रमों में क्रम से वे दो बीजसूत्र और उन के विधि लिखते हैं।

९७। एकवर्णएकघातसमीकरणसंबन्धि प्रश्नों में जिन में अव्यक्त राशि किसी व्यक्त संख्या से गुणित वा भक्त वा अपने किसी अंश से सहित वा रहित हो उन में स्पष्ट है कि उन प्रश्नों से अय = क, ऐसा एक समीकरण उत्पन्न होगा। इन में क यह व्यक्त संख्या प्रश्न में ज्ञात रहती है इस को दृष्ट कहते हैं। अब ऐसे प्रश्न में जो अव्यक्त राशि का मान कोइ इष्ट अर्थात् चाहो सो मानो, जैसा इ, तो स्पष्ट है कि अइ यह क के समान न होगा किंतु और कोइ होगा सो मानो कि न होगा इस को निष्पन्न कहते हैं। तो अइ = न, यह दूसरा समीकरण है। इस से अ = $\frac{न}{इ}$। इस अ की उन्मिति को अय = क, इस समीकरण में अ के स्थान में रखने से $\frac{न}{इ} \times य = क \therefore य = \frac{क \times इ}{न}$। इस प्रकार से ऐसे प्रश्नों के उत्तर के लिये $य = \frac{क \times इ}{न}$ यह बीजसूत्र है। इस से यह नीचे लिखा हुआ विधि उत्पन्न होता है। इस विधि को दृष्टकर्म कहते हैं।

दृष्टकर्म। जिस ऐसे प्रश्न का उत्तर जानना हो उस में पहिले अव्यक्त संख्या के स्थान में जो चाहो सो संख्या मान लेओ उस को इष्ट कहते हैं उस में प्रश्न की बोली के अनुसार सब गणित करो तब अन्त में जो निष्पन्न होगा उस का इष्ट और दृष्ट इन के गुणनफल में भाग देओ जो लब्धि आवेगी वही अव्यक्तराशि का मान होगा। उस से प्रश्न का उत्तर स्पष्ट होगा।

उदा०। जिस संख्या को दो से गुण के फल में उसी संख्या का आधा और तिहाई घटा देओ तो ४९ शेष रहता है वह संख्या क्या है?

मानो कि वह संख्या ६ है, तब

$$६ \times २ - ६ \times \frac{१}{२} - ६ \times \frac{१}{३}$$
$$= १२ - ३ - २ = ७ \text{ यह निष्पन्न है।}$$

और प्रश्न में ४९ दृष्ट है।

इस लिये $\frac{४९ \times ६}{७} = ४२$, यही अभीष्ट संख्या है। यह उत्तर।

९८। जब कि एकवर्णएकघातसमीकरणसम्बन्धि प्रश्न मात्र में अय + क, और गय + घ ऐसे दो समान पक्ष उत्पन्न होते हैं यह स्पष्ट है।

इस लिये इन दो पक्षों का अन्तर अवश्य ० होगा

अर्थात् अय + क − (गय + घ) = ०

$\therefore$ (अ − ग) य + (क − घ) = ०

अब ऐसे प्रश्न में जो अव्यक्तराशि का मान इष्ट अर्थात् चाहो सो मानो जैसा इ तो स्पष्ट है कि इस से प्रश्न की बोली के अनुसार जो अइ + क और गइ + घ, ये दो पक्ष उत्पन्न होंगे ये परस्पर समान न होंगे इस लिये इन का अन्तर ० नहीं होगा। तो मानो कि इन दो पक्षों का अन्तर न है

अर्थात् अइ + क − (गइ + घ) = न

$\therefore$ (अ − ग) इ + (क − घ) = न

और ऊपर का समीकरण, (अ − ग) य + (क − घ) = ०

अन्तर करने से, (अ − ग) (इ − य) = न

इसी प्रकार से जो अव्यक्तराशि का मान कोइ दूसरा इष्ट जैसा उ मानो और इस इष्ट से जो दो पक्ष होंगे उन का अन्तर म मानो तो

ऊपर की युक्ति से (अ − ग) (उ − य) = म, यह समीकरण उत्पन्न होगा।

$\therefore$ भागहार से $\frac{(\text{अ} - \text{ग})(\text{इ} - \text{य})}{(\text{अ} - \text{ग})(\text{उ} - \text{य})} = \frac{\text{न}}{\text{म}}$

अर्थात्, $\frac{\text{इ} - \text{य}}{\text{उ} - \text{य}} = \frac{\text{न}}{\text{म}}$

वा, मइ − मय = नउ − नय

$\therefore$ (न − म) य = नउ − मइ

और $\text{य} = \frac{\text{नउ} - \text{मइ}}{\text{न} - \text{म}}$

इस प्रकार से एकवर्णएकघातसमीकरणसम्बन्धि प्रश्नों के उत्तर के लिये $\text{य} = \frac{\text{नउ} - \text{मइ}}{\text{न} - \text{म}}$ यह बीजसूत्र है। इस से उन प्रश्नों का उत्तर जानने के लिये नीचे लिखा हुआ सामान्य विधि उत्पन्न होता है। इस को द्वीष्टकर्म कहते हैं।

द्वीष्टकर्म । प्रश्न में जो अव्यक्त राशि होगा उस के स्थान में कोई इष्ट संख्या मान के उस में प्रश्न की बोली के अनुसार सब गणित कर के समान दो पक्षों की संख्या सिद्ध करो जो वे दो संख्या परस्पर समान हों तो जो इष्ट माना है वही अव्यक्त राशि का मान होगा । परंतु जो वे संख्या परस्पर समान न हों तो उन का अन्तर करो और पहिले पक्ष की संख्या से दूसरे पक्ष की संख्या जैसी छोटी वा बड़ी होगी उस के अनुसार वह अन्तर धन वा ऋण जानो । इसी प्रकार से अव्यक्त राशि के स्थान में दूसरी एक इष्ट संख्या मान के दूसरा अन्तर धन वा ऋण सिद्ध करो । फिर पहिले अन्तर को दूसरी इष्ट संख्या से गुण देओ और दूसरे अन्तर को पहिली इष्ट संख्या से गुण देओ । तब जो वे अन्तर दोनों धन वा दोनों ऋण हों तो इन दो गुणनफलों के अन्तर में उन दो अन्तरों के अन्तर का भाग देओ । परंतु जो एक अन्तर धन हो और एक ऋण हो तो गुणनफलों के योग में अन्तरों के योग का भाग देओ । यों करने से जो लब्धि आवेगी वही अव्यक्तराशि का मान होगा । उस से प्रश्न का उत्तर स्पष्ट होगा ।

उदा० । जिस संख्या को दो से गुण के फल में १७ घटा देओ तो शेष, उस संख्या के आधे से १ अधिक रहता है वह संख्या क्या है?

मानो कि वह संख्या १४ है,

तो $१४ \times २ - १७ = ११$, परंतु $१४ \times \frac{१}{२} + १ = ८$,

$\therefore ११ - ८ = ३$ यह पहिला अन्तर धन है ।

फिर मानो कि वह संख्या १८ है,

तो $१८ \times २ - १७ = १९$ और $१८ \times \frac{१}{२} + १ = १०$,

$\therefore १९ - १० = ९$ यह दूसरा भी अन्तर धन है ।

अब $३ \times १८ = ५४$ और $९ \times १४ = १२६$

इस लिये $\frac{१२६ - ५४}{९ - ३} = \frac{७२}{६} = १२$ यही अभीष्ट संख्या है । यह उत्तर ।

बीजगणित का पूर्वार्ध समाप्त हुआ ॥

